

tfa tirocinio formativo attivo

Matematica

manuale per prove scritte e orali

per le classi di abilitazione

A047 Matematica

A049 Matematica e Fisica



Comprende **software**
per effettuare infinite
esercitazioni



TFA

Matematica

Manuale teorico

per le classi di abilitazione

A047 Matematica

A049 Matematica e Fisica



Accedi ai servizi riservati

Il **codice personale** contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai nostri clienti.
Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a

Infinite esercitazioni on-line

codice personale



Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.

Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate a pagina iv

Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile

L'accesso ai servizi riservati ha la durata di un anno dall'attivazione del codice


TFA – Matematica – Manuale teorico
Copyright © 2014, EdiSES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2018 2017 2016 2015 2014

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione,
anche parziale, del presente volume o
di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Grafica di copertina a cura di  curvilinee

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

Fotocomposizione: EdiSES S.r.l. – Napoli

Fotoincisione: R.ES. Centro Prestampa S.n.c. – Napoli

Stampato presso Litografia di Enzo Celebrano – Pozzuoli (Napoli)

per conto della EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 6584 446 5

<http://www.edises.it>
e-mail: info@edises.it

Sommario

PARTE PRIMA LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Capitolo Primo	La matematica nel quadro normativo europeo	3
Capitolo Secondo	La matematica nel quadro del II ciclo di istruzione	19
Capitolo Terzo	Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica	57
Capitolo Quarto	Teorie dell'apprendimento e didattica della matematica	83
Capitolo Quinto	Software didattici	124

PARTE SECONDA CONTENUTI DISCIPLINARI

Capitolo Primo	Il linguaggio matematico	157
Capitolo Secondo	Algoritmi e computabilità	199
Capitolo Terzo	Insiemi, relazioni e funzioni	263
Capitolo Quarto	Insiemi numerici	279
Capitolo Quinto	Algebra	333
Capitolo Sesto	Spazi vettoriali e sistemi lineari	387
Capitolo Settimo	Geometria euclidea, geometrie non euclidee e trigonometria	453
Capitolo Ottavo	Le trasformazioni geometriche	493
Capitolo Nono	Il metodo analitico in geometria	547
Capitolo Decimo	Geometria proiettiva, spazi topologici e programma di Klein	603
Capitolo Undicesimo	Calcolo differenziale per funzioni di una variabile	663
Capitolo Dodicesimo	Calcolo differenziale per funzioni di più variabili	761
Capitolo Tredicesimo	Il problema della misura e il calcolo integrale	795
Capitolo Quattordicesimo	Serie numeriche, serie di funzioni ed equazioni differenziali	839
Capitolo Quindicesimo	Calcolo numerico	913
Capitolo Sedicesimo	Calcolo combinatorio e probabilità	967
Capitolo Diciassettesimo	Statistica descrittiva e analisi statistica univariata	1049
Capitolo Diciottesimo	Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale	1119

Premessa

Il presente lavoro è concepito come supporto per quanti si accingono ad affrontare le prove di selezione del tirocinio formativo attivo e costituisce un valido strumento di ausilio per tutti coloro che intendono intraprendere la professione docente.

L'opera è divisa in due parti: la prima è di carattere metodologico-didattico ed ordinamentale, mentre la seconda affronta i contenuti della disciplina, così come proposti nelle attuali Indicazioni e Linee guida dell'istruzione secondaria. Nella **prima parte** viene presentato il quadro ordinamentale specifico della matematica e vengono proposte delle problematiche reali di gestione dei tempi e della classe che il docente deve affrontare nell'attività didattica; vengono, inoltre, illustrate diverse metodologie didattiche alla luce delle distinte teorie dell'apprendimento. Vi è infine una particolare attenzione nel presentare le nuove tecnologie per la didattica, dalla LIM (la lavagna interattiva multimediale) ai software specifici per la matematica (geometria dinamica, calcolo simbolico). In questa fase si forniscono anche diversi spunti ed idee per attività da svolgere in classe. In ogni caso, la didattica e l'approccio laboratoriale alla disciplina costituiscono l'aspetto fondante e il denominatore comune di questa parte del volume.

Nella **seconda parte** si cerca di affrontare i contenuti della disciplina nel modo più compendioso e completo possibile, in relazione anche alla necessità di contenere l'estensione del volume. Si è cercato di fornire sia approcci formali e rigorosi, sia approcci più pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può aver affrontato. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.

Il volume è completato da un software di simulazione, accessibile dall'area riservata, mediante cui effettuare esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.

Eventuali aggiornamenti normativi, ma anche materiali didattici integrativi, saranno resi disponibili nell'apposita area riservata.

Istruzioni per l'accesso all'area riservata

Tutti i materiali e i servizi associati al volume sono accessibili dall'**area riservata** che si attiva mediante registrazione al sito

Se sei già registrato al sito

Collegati a www.edises.it
Clicca su "Accedi al materiale didattico"
Inserisci user e password
Inserisci le ultime 4 cifre dell'ISBN del volume in tuo possesso riportate in basso a destra sul retro di copertina
Inserisci il codice personale che trovi sul frontespizio del volume
Verrai automaticamente reindirizzato alla tua area personale

Se non sei registrato al sito

Collegati a www.edises.it
Clicca su "Accedi al materiale didattico"
Seleziona "Se non sei ancora registrato"
Clicca qui"
Completa il form in ogni sua parte e al termine attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
Dopo aver cliccato sul link presente nell'email di conferma, verrai reindirizzato al sito EdISES
A questo punto potrai seguire la procedura descritta per gli utenti registrati al sito

Attenzione! Questa procedura è necessaria solo per il primo accesso. Successivamente, basterà loggarsi – cliccando su "entra" in alto a destra da qualsiasi pagina del sito ed inserendo le proprie credenziali (user e password) – per essere automaticamente reindirizzati alla propria area personale.



Potete segnalarci i vostri suggerimenti o sottoporci le vostre osservazioni all'indirizzo redazione@edises.it



Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei supporti multimediali potete contattare la nostra assistenza tecnica all'indirizzo support@edises.it

Indice generale

PARTE PRIMA LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Capitolo Primo La matematica nel quadro normativo europeo

1.1	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente	3
1.1.1	La strategia di Lisbona e l'apprendimento permanente	3
1.1.2	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente	4
1.1.3	La matematica nelle otto competenze	6
1.2	Le indicazioni per il curriculum del primo ciclo di istruzione	7
1.2.1	Gli aspetti innovativi delle Indicazioni per il curriculum	7
1.2.2	La matematica nelle Indicazioni per il curriculum	9
1.2.3	Le nuove Indicazioni per il curriculum	12
1.3	Le competenze chiave di cittadinanza e l'asse matematico	13
1.3.1	Gli assi culturali e le competenze chiave per la cittadinanza	13
1.3.2	L'asse matematico	15
1.3.3	Il quadro delle competenze comuni a tutti i percorsi di istruzione	17

Capitolo Secondo La matematica nel quadro del II ciclo di istruzione

2.1	La riforma del secondo ciclo di istruzione	19
2.1.1	La "Riforma Gelmini"	19
2.1.2	L'autonomia scolastica	20
2.2	La matematica nelle Indicazioni nazionali per i licei	20
2.2.1	L'impianto della riforma ordinamentale dei licei	20
2.2.2	La matematica nel quadro orario dei nuovi licei	22
2.2.3	La valutazione periodica in matematica	23
2.2.4	Il carattere delle Indicazioni nazionali per i licei	24
2.2.5	Gli obiettivi specifici di apprendimento della matematica nei licei	25
2.2.6	La matematica nei licei Artistico, Classico, Linguistico, Musicale e Coreutico, delle Scienze Umane	27
2.2.7	La matematica nell'opzione economico sociale del liceo delle Scienze Umane	29
2.2.8	La matematica nel liceo Scientifico e nell'opzione scienze applicate	30
2.2.9	Confronto analitico tra il liceo Scientifico e gli altri licei	32
2.3	La matematica nelle Linee Guida per gli Istituti Tecnici	38
2.3.1	L'impianto ordinamentale dei nuovi istituti tecnici	38
2.3.2	La matematica nel quadro orario dei nuovi tecnici	41

VIII Indice generale

2.3.3	Le linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento	41
2.3.4	La matematica come insegnamento di istruzione generale nei due settori degli istituti tecnici al primo biennio	43
2.3.5	La matematica come insegnamento di istruzione generale nel triennio dei due settori degli istituti tecnici	47
2.3.6	La matematica come insegnamento di indirizzo nel secondo biennio del settore tecnologico	51
2.4	La matematica nelle Linee Guida per gli Istituti Professionali	52
2.4.1	L'impianto ordinamentale dei nuovi istituti professionali	52
2.4.2	Le linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento	54
2.4.3	La matematica nel quadro orario dei nuovi professionali e nelle linee guida	55

Capitolo Terzo Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica

3.1	Le rilevazioni Invalsi	57
3.1.1	L'Invalsi e la rilevazione degli apprendimenti nella scuola secondaria di secondo grado	57
3.1.2	La prova di matematica	58
3.1.3	I contenuti matematici	59
3.1.4	I processi	62
3.1.5	Le prove Invalsi: come sono strutturate e cosa rilevano	63
3.2	L'indagine OCSE-PISA	66
3.2.1	Aspetti generali dell'indagine	66
3.2.2	Competenze	66
3.2.3	Contenuti, processi, capacità soggiacenti e contesto	69
3.2.4	Analisi delle prove OCSE-PISA	71
3.3	La didattica per competenze in matematica	73
3.3.1	I risultati della scuola italiana nelle prove OCSE-PISA	73
3.3.2	Le cause dei risultati poco soddisfacenti dell'Italia in matematica	74
3.3.3	Approccio formale e teorico alla disciplina	76
3.3.4	Approccio laboratoriale e contestualizzato alla disciplina	79
3.4	L'indagine IEA-TIMSS	80

Capitolo Quarto Teorie dell'apprendimento e didattica della matematica

4.1	Le teorie dell'apprendimento	83
4.1.1	Comportamentismo	83
4.1.2	Cognitivismo e strutturalismo	84
4.1.3	Costruttivismo	89
4.2	La didattica nell'era digitale e nell'era del Web 2.0	91
4.2.1	I nativi digitali	91
4.2.2	Il Web e il connettivismo	93
4.3	Nuove tecnologie per la didattica	96
4.3.1	La Lavagna Interattiva Multimediale (LIM)	96
4.3.2	La LIM: collocazione nell'aula, calibrazione e aspetti tecnici	98

4.3.3	Prospettive didattico-metodologiche della LIM	102
4.3.4	I learning management system (LMS)	102
4.4	Metodologie didattiche	104
4.4.1	Didattica tradizionale e didattica laboratoriale	104
4.4.2	La lezione frontale	105
4.4.3	L'apprendimento collaborativo	106
4.4.4	L'apprendimento cooperativo	109
4.4.5	Il peer tutoring	110
4.4.6	Il team teaching	111
4.4.7	La ricerca-azione	114
4.5	Problematiche della pianificazione dell'attività didattica	117
4.5.1	Metodologie didattiche e tempistica	117
4.5.2	Piani di studio e apprendimenti personalizzati	118
4.5.3	I vincoli posti dalla normativa alla pianificazione didattica	118
4.5.4	Consigli per impostare il lavoro in classe	120

Capitolo Quinto Software didattici

5.1	Software di Geometria Dinamica	124
5.1.1	Panoramica sui software di geometria dinamica	124
5.1.2	Geogebra – funzionalità di carattere generale	125
5.1.3	Costruzione e verifica delle proprietà del baricentro di un triangolo	127
5.1.4	Costruzione e verifica delle proprietà dell'ortocentro di un triangolo	132
5.1.5	Costruzione di una parabola i cui parametri variano dinamicamente	135
5.1.6	Il significato geometrico della derivata di una funzione in un punto	138
5.2	I software di calcolo simbolico	140
5.2.1	Panoramica sui software di calcolo simbolico	140
5.2.2	wxMaxima – funzionalità di carattere generale	142
5.2.3	Calcoli algebrici	143
5.2.4	Calcolo letterale	145
5.2.5	Risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni	148
5.2.6	Calcoli di analisi matematica e rappresentazione delle funzioni	150

PARTE SECONDA CONTENUTI DISCIPLINARI

Capitolo Primo Il linguaggio matematico

1.1	Il metodo assiomatico	157
1.1.1	Le teorie matematiche	157
1.1.2	La definizione dei termini	157
1.1.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali	158

X Indice generale

1.1.4	La dimostrazione dei teoremi	159
1.1.5	L'assioma nelle teorie realistiche e nelle teorie formali	160
1.1.6	Sistema assiomatico di una teoria formale	161
1.1.7	Coerenza, indipendenza e completezza di un sistema di assiomi	162
1.1.8	I teoremi di incompletezza di Godel	163
1.2	La logica come studio del linguaggio	164
1.2.1	Grafemi e fonemi	164
1.2.2	Parole ed enunciati	165
1.2.3	Argomenti, concetti e livelli di astrazione	165
1.2.4	Significati e significanti	166
1.2.5	<i>Type e token</i>	167
1.2.6	Predicati ed enunciati aperti	168
1.2.7	Linguaggio naturale e artificiale (simbolico)	168
1.3	Logica degli enunciati	169
1.3.1	Valore di verità di un enunciato	169
1.3.2	Enunciati semplici, composti e connettivi logici	170
1.3.3	La negazione "non"	171
1.3.4	La congiunzione "e"	172
1.3.5	La disgiunzione inclusiva "o"	172
1.3.6	La disgiunzione esclusiva "o... o..."	173
1.3.7	L'implicazione materiale "se... allora..."	174
1.3.8	La doppia implicazione "... se e solo se..."	175
1.3.9	Espressioni di enunciati	176
1.3.10	Espressioni equiveridiche	176
1.3.11	I connettivi NAND e NOR e le formule di De Morgan	178
1.3.12	Calcolo di tutti i possibili enunciati ricavabili da due enunciati	179
1.3.13	Basi dei connettivi logici	180
1.3.14	Tautologie e contraddizioni	180
1.4	Assiomatizzazione della logica degli enunciati	182
1.4.1	Gli enunciati e il loro significato nel linguaggio naturale	182
1.4.2	Metalinguaggio e linguaggio oggetto	183
1.4.3	Regole logiche (regole di inferenza)	185
1.4.4	Grammatica	188
1.4.5	Morfologia e sintassi	188
1.4.6	Semantica	189
1.5	La logica dei predicati	191
1.5.1	Introduzione	191
1.5.2	I quantificatori	191
1.5.3	Morfologia e sintassi del calcolo dei predicati del primo ordine	193
1.5.4	Semantica dei predicati	195
1.5.5	Metateoria	198
Capitolo Secondo Algoritmi e computabilità		
2.1	L'informatica: i dati e gli algoritmi	199
2.2	Costanti, variabili e strutture di dati	201
2.3	Algoritmi strutturati	202
2.4	Modalità di rappresentazione di un algoritmo	203

2.4.1	Pseudo-linguaggio	203
2.4.2	Diagrammi di flusso	204
2.5	Tipologie di algoritmi	206
2.5.1	Algoritmi con struttura sequenziale	206
2.5.2	Algoritmi con struttura condizionale	207
2.5.3	Algoritmi con struttura iterativa	211
2.5.4	Le funzioni	217
2.5.5	Algoritmi con struttura ricorsiva	218
2.6	Linguaggi di programmazione	220
2.7	Il linguaggio C	223
2.7.1	Uso delle variabili	223
2.7.2	Uso degli operatori	224
2.7.3	Uso delle strutture di dati	225
2.7.4	Sintassi generale e funzioni	227
2.7.5	Codici con strutture sequenziali	228
2.7.6	Codici con strutture condizionali e iterative	230
2.8	Complessità computazionale	235
2.9	Verso una definizione formale di algoritmo	240
2.9.1	Le funzioni computabili (calcolabili)	240
2.9.2	La macchina di Turing	240
2.9.3	Esempio di macchina di Turing	242
2.9.4	Funzioni T-computabili e macchina di Turing universale	245
2.10	Il calcolatore di Von Neumann	246
2.11	Altre macchine per l'esecuzione di algoritmi	247
2.12	Funzioni ricorsive	248
2.12.1	Definizioni preliminari	248
2.12.2	Funzioni base	249
2.12.3	Composizione	249
2.12.4	Ricorsione	250
2.12.5	Funzioni ricorsive primitive	250
2.12.6	Minimalizzazione	250
2.12.7	Funzioni ricorsive (funzioni ricorsive parziali)	251
2.13	Tesi di Church	251
2.14	Lo studio dei problemi risolvibili mediante un algoritmo	252
2.14.1	Insiemi, proprietà e problemi decidibili	252
2.14.2	Problemi semi-decidibili e insiemi effettivamente enumerabili	254
2.14.3	Esempi di problemi decidibili e semi-decidibili	257
2.14.4	Il problema della fermata di una macchina di Turing	259
2.14.5	La cardinalità degli algoritmi e dei problemi	260

Capitolo Terzo Insiemi, relazioni e funzioni

3.1	Concetti fondamentali	263
3.2	Relazione di inclusione	264
3.3	Operazioni tra insiemi	265
3.4	Insieme delle parti	268
3.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano	268
3.6	Relazione binaria	269

XII **Indice generale**

3.7	Relazioni di equivalenza	271
3.8	Relazioni d'ordine largo	272
3.9	Relazioni d'ordine stretto	273
3.10	Funzioni	273
3.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive	275
3.12	Funzioni composte	277
3.13	Funzione inversa e identità	277

Capitolo Quarto Insiemi numerici

4.1	Leggi di composizione interne ed esterne	279
4.2	L'insieme dei numeri naturali	279
4.2.1	Assiomi di Peano	280
4.2.2	Addizione di naturali	281
4.2.3	Moltiplicazione di naturali	283
4.2.4	Relazione d'ordine nei naturali	284
4.2.5	La divisione euclidea	285
4.2.6	La potenza	287
4.3	Rappresentazione dei numeri naturali	287
4.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali	287
4.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma	288
4.3.3	Il sistema di numerazione decimale	289
4.3.4	Il sistema di numerazione binario	290
4.3.5	Conversioni	291
4.4	L'insieme dei numeri interi	292
4.5	I numeri razionali	296
4.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali	296
4.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali	297
4.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali	298
4.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali	299
4.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali	301
4.6.1	La scrittura posizionale	301
4.6.2	L'estrazione di radice	301
4.6.3	Le grandezze incommensurabili	301
4.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi	303
4.6.5	La quadratura del cerchio	304
4.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali	304
4.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale	304
4.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind	304
4.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali	308
4.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti	308
4.8.1	I numeri irrazionali	308
4.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici	309
4.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti	310
4.9	Numeri complessi	311
4.9.1	I problemi aperti dopo l'estensione ai numeri reali	311
4.9.2	Costruzione dei numeri complessi	312

4.9.3	Forma algebrica dei numeri complessi	313
4.9.4	Rappresentazione geometrica e forma trigonometrica dei numeri complessi	314
4.9.5	Operazioni sui numeri complessi in forma trigonometrica	315
4.9.6	Teorema fondamentale dell'algebra	318
4.10	Cardinalità di un insieme	319
4.10.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali	319
4.10.2	Operazioni tra numeri cardinali	320
4.10.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili	321
4.10.4	Insiemi numerici numerabili	323
4.10.5	Insiemi numerici non numerabili	326
4.10.6	L'ipotesi del continuo	330

Capitolo Quinto Algebra

5.1	Le strutture algebriche	333
5.1.1	Definizione di struttura algebrica	333
5.1.2	Proprietà associativa e semigrupperi	333
5.1.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi	334
5.2	I gruppi	334
5.2.1	Esistenza dell'elemento inverso	334
5.2.2	Definizione di gruppo	335
5.2.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani	335
5.2.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori	336
5.3	Aritmetica modulare	338
5.3.1	Congruenza modulo n	338
5.3.2	Teoremi dell'aritmetica modulare	338
5.3.3	Classi di congruenza modulo n e insieme quoziente	339
5.3.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza	340
5.4	Gruppi ciclici	342
5.4.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi	342
5.4.2	Gruppi additivi	343
5.4.3	Gruppi moltiplicativi	343
5.5	Tavole di Cayley	345
5.6	Prodotto di gruppi	346
5.7	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro	347
5.7.1	Definizione di sottogruppo	347
5.7.2	Classi laterali	347
5.7.3	Sottogruppi normali	349
5.8	Gruppi risolubili	353
5.9	I gruppi simmetrici	354
5.9.1	Permutazioni	354
5.9.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni	355
5.9.3	Cicli e trasposizioni	356
5.9.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno	360
5.9.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici S_2 , S_3 e S_4	361
5.9.6	Il gruppo simmetrico S_5	363

XIV Indice generale

5.10	Gruppo diedrale	364
5.10.1	Definizione	364
5.10.2	Interpretazione geometrica	365
5.11	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi	370
5.12	Anelli	374
5.12.1	Definizione	374
5.12.2	Anello dei polinomi	375
5.13	Corpi e campi	377
5.13.1	Definizioni	377
5.13.2	Estensione di un campo	378
5.13.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa)	380
5.14	Teoria di Galois	382
5.14.1	L'idea	382
5.14.2	Gruppo di Galois	383
5.14.3	Risolvibilità per radicali di un'equazione di grado n	385

Capitolo Sesto Spazi vettoriali e sistemi lineari

6.1	Gli spazi vettoriali	387
6.1.1	Definizione di spazio vettoriale	387
6.1.2	Sottospazio	390
6.1.3	Combinazione lineare di vettori	391
6.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare	392
6.1.5	Generatori e basi	393
6.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale	395
6.2	Applicazioni lineari	396
6.2.1	Definizione di applicazione lineare	396
6.2.2	Composizione di applicazioni lineari	397
6.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari	397
6.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare	398
6.2.5	Particolari applicazioni lineari	399
6.3	Matrici	400
6.3.1	Definizioni	400
6.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici	401
6.3.3	Moltiplicazione tra matrici	404
6.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari	409
6.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari	413
6.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili	413
6.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici	414
6.4	Determinanti	414
6.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice	414
6.4.2	Proprietà del determinante di una matrice	420
6.4.3	Rango di una matrice	423
6.5	Sistemi lineari	427
6.5.1	Definizione di sistema lineare	427
6.5.2	Sistemi lineari compatibili	428
6.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati	429

6.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici	430
6.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema	431
6.5.6	Matrice inversa	437
6.5.7	Sistemi lineari omogenei	440
6.6	Diagonalizzazione di matrici	443
6.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio	443
6.6.2	Matrici diagonalizzabili	444
6.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici	445
6.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione	447
6.6.5	Segnatura di una matrice	447

Capitolo Settimo Geometria euclidea, geometrie non euclidee e trigonometria

7.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide	453
7.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide	453
7.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i>	453
7.1.3	Il quinto postulato di Euclide	456
7.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i>	457
7.2	La nascita delle geometrie non euclidee	461
7.2.1	Sostituire il quinto postulato	461
7.2.2	Dimostrare il quinto postulato: il tentativo di Saccheri	462
7.2.3	La nascita delle geometrie non euclidee	464
7.2.4	Una assiomatica per la geometria euclidea	465
7.2.5	La curvatura di una linea e di una superficie	466
7.3	Modelli di geometrie non euclidee	469
7.3.1	Il modello di Klein di geometria iperbolica	470
7.3.2	Il modello di Poincaré di geometria iperbolica	472
7.3.3	Il modello di Riemann di geometria sferica	473
7.4	La trigonometria	475
7.4.1	Relazioni trigonometriche per un triangolo rettangolo	475
7.4.2	Teorema dei seni e teorema della corda	480
7.4.3	Teorema delle proiezioni e teorema di Carnot (o del coseno)	480
7.4.4	Risoluzione di un triangolo qualsiasi	481
7.4.5	Formule per il calcolo dell'area di un triangolo	486
7.4.6	Formule per il calcolo del raggio della circonferenza circoscritta e inscritta in un triangolo	489

Capitolo Ottavo Le trasformazioni geometriche

8.1	Spazio affine	493
8.1.1	Definizione di spazio affine	493
8.1.2	Proprietà dello spazio affine	495
8.1.3	Lo spazio vettoriale come spazio affine	496
8.1.4	Sottospazio affine e spazio direttore	497
8.1.5	Sottospazi affini paralleli, incidenti e sghembi	500
8.1.6	Intersezione e unione di sottospazi affini, spazio congiungente	501
8.1.7	Dimensioni di sottospazi affini e vettoriali	501
8.1.8	Dipendenza e indipendenza affine	504

XVI **Indice generale**

8.1.9	Riferimento e coordinata affine	505
8.2	Trasformazione affine e affinità	507
8.2.1	Definizioni	507
8.2.2	Proprietà	508
8.2.3	Rappresentazione matriciale delle trasformazioni affini	508
8.2.4	Rappresentazione matriciale delle affinità di uno spazio in sé	509
8.3	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano	511
8.3.1	Trasformazioni affini	511
8.3.2	Affinità	515
8.3.3	Proprietà delle affinità	516
8.3.4	Punti uniti di una trasformazione	520
8.3.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo	523
8.3.6	Particolari similitudini: omotetie	528
8.3.7	Isometrie	531
8.3.8	Isometrie dirette	532
8.3.9	Isometrie inverse	540
8.3.10	Riepilogo	544

Capitolo Nono Il metodo analitico in geometria

9.1	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo	547
9.2	Geometria analitica nel piano	549
9.2.1	Punti nel piano cartesiano	549
9.2.2	Vettori nel piano cartesiano	550
9.2.3	Le curve algebriche	553
9.3	Curve algebriche di primo grado: le rette	554
9.3.1	Equazione di una retta in forma parametrica	554
9.3.2	Equazione di una retta in forma implicita	555
9.3.3	Intersezione di due rette	555
9.3.4	Rette: casi particolari	558
9.3.5	Equazione della retta in forma segmentaria	559
9.3.6	Equazione della retta in forma esplicita	560
9.3.7	Fasci di rette	561
9.3.8	Alcune relazioni utili sulla retta	563
9.4	Curve algebriche di secondo grado: le coniche	565
9.4.1	Classificazione di una conica	565
9.4.2	Riduzione a forma normale di una conica	568
9.4.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde	574
9.5	Geometria analitica nello spazio	576
9.5.1	Punti nello spazio	576
9.5.2	Vettori nello spazio	577
9.6	Superfici algebriche di primo grado: i piani	581
9.6.1	Equazione parametrica del piano	581
9.6.2	Equazione generale del piano	581
9.6.3	Equazioni di piani particolari	585
9.6.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo	586
9.7	Le rette nello spazio	587
9.7.1	Equazioni parametriche della retta	587

9.7.2	Equazioni normali della retta	588
9.7.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta	588
9.7.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli)	592
9.7.5	Rette parallele e perpendicolari	593
9.7.6	Piani paralleli e perpendicolari	595
9.7.7	Rette e piani perpendicolari	595
9.7.8	Distanza di un punto da un piano	596
9.8	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche	596
9.8.1	Classificazione di una quadrica	596

Capitolo Decimo Geometria proiettiva, spazi topologici e programma di Klein

10.1	L'idea della geometria proiettiva	603
10.1.1	La prospettiva	603
10.1.2	La retta proiettiva	604
10.1.3	Il piano proiettivo	606
10.1.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo	611
10.1.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio	612
10.1.6	Definizione operativa di spazio proiettivo	613
10.2	Spazi proiettivi	615
10.2.1	Definizione	615
10.2.2	Spazio proiettivo associato a K^n	616
10.2.3	Sottospazio proiettivo	617
10.2.4	Dipendenza e indipendenza lineare	619
10.2.5	Intersezione di sottospazi e spazio congiungente	620
10.2.6	Formula di Grassmann per i sottospazi proiettivi	620
10.2.7	Applicazioni proiettive e proiettività	621
10.3	Operare con le coordinate omogenee	626
10.3.1	Rette nel piano	626
10.3.2	Coniche in coordinate omogenee	628
10.4	Le proiettività	630
10.4.1	Proiettività sulla retta proiettiva	630
10.4.2	Punti uniti	631
10.4.3	Il birapporto	634
10.4.4	Proiettività sul piano	636
10.4.5	Punti uniti e rette unite	639
10.4.6	Studio della prospettiva	645
10.5	Spazi topologici e trasformazioni topologiche	652
10.5.1	Spazi metrici	652
10.5.2	Intorno circolare di un punto	653
10.5.3	Successione convergente	654
10.5.4	Successione di Cauchy	654
10.5.5	Applicazioni continue e uniformemente continue	655
10.5.6	Dallo spazio metrico allo spazio topologico	655
10.5.7	Spazi topologici	656
10.5.8	Classificazione dei punti rispetto ad un sottoinsieme	657
10.5.9	Insiemi aperti e definizione alternativa di spazio topologico	658

XVIII **Indice generale**

10.5.10	Insiemi chiusi e definizione alternativa di spazio topologico	659
10.5.11	Chiusura, frontiera e parte interna di un insieme	659
10.5.12	Sottospazi topologici	660
10.5.13	Applicazioni continue e trasformazioni topologiche	660
10.6	Il programma di Erlangen	661

Capitolo Undicesimo **Calcolo differenziale per funzioni di una variabile**

11.1	Intervalli e intorni	663
11.1.1	Tipologie di intervalli	663
11.1.2	Intorni e intorni circolari	665
11.2	Funzioni reali di variabili reali	665
11.2.1	Generalità	665
11.2.2	Campo di esistenza ed immagine	667
11.2.3	Funzioni composte	668
11.2.4	Funzioni invertibili	668
11.2.5	Funzioni monotone	669
11.2.6	Funzioni pari e dispari	672
11.2.7	Funzioni periodiche	673
11.2.8	Funzioni elementari	674
11.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali	681
11.3	Limite di una funzione	683
11.3.1	Punti di accumulazione	683
11.3.2	Definizione di limite	684
11.3.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto	685
11.3.4	Verifica del limite	687
11.3.5	Limite destro e limite sinistro	690
11.3.6	Teoremi sui limiti	692
11.3.7	Operazioni sui limiti	694
11.3.8	Generalizzare le operazioni sui limiti	695
11.3.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli	697
11.3.10	Calcolo di limiti	700
11.4	Successioni e limiti di successioni	704
11.4.1	Definizione e generalità	704
11.4.2	Limite di una successione di numeri reali	707
11.5	Continuità delle funzioni reali	708
11.5.1	Funzione continua	708
11.5.2	Funzione uniformemente continua	713
11.5.3	Punti di discontinuità	714
11.5.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione	716
11.6	Derivata	717
11.6.1	Rapporto incrementale	717
11.6.2	Definizione di derivata e derivabilità	718
11.6.3	Derivata destra e sinistra	719
11.6.4	Continuità e derivabilità	719
11.6.5	Dal rapporto incrementale alla derivata	720
11.6.6	Interpretazione geometrica della derivata	722
11.6.7	Retta tangente ad una funzione in un punto	724

11.6.8	Regole di derivazione	725
11.6.9	Calcolo di derivate	725
11.6.10	Punti di discontinuità della derivata	728
11.6.11	Derivate di ordine superiore	731
11.6.12	Differenziale	732
11.7	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale	733
11.7.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange	733
11.7.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione	737
11.7.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione	738
11.7.4	Estremo inferiore ed estremo superiore	738
11.7.5	Massimo e minimo relativo	740
11.7.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto	741
11.7.7	Condizioni su concavità e punti di flesso	745
11.7.8	I teoremi di l'Hopital	747
11.7.9	Asintoti di una funzione	750
11.7.10	Studio del grafico di una funzione	752
Capitolo Dodicesimo Calcolo differenziale per funzioni di più variabili		
12.1	Funzioni definite in R^n e derivate parziali	761
12.1.1	Premessa	761
12.1.2	Vettori, direzioni e basi in R^n	761
12.1.3	Applicazioni lineari e spazio duale	762
12.1.4	Derivata lungo una direzione e derivata parziale	763
12.1.5	Notazioni specifiche per R^2 e R^3 e calcolo delle derivate parziali	764
12.2	Il differenziale e le funzioni differenziabili	765
12.2.1	Funzione differenziabile	766
12.2.2	La differenziabilità implica la derivabilità	766
12.2.3	Forma esplicita della derivata lungo una direzione	767
12.2.4	Gradiente e forma esplicita del differenziale	769
12.2.5	La differenziabilità implica la continuità	771
12.2.6	Derivate successive e teorema di Schwartz	772
12.2.7	Funzioni di classe C^k	774
12.3	Massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili	775
12.3.1	Definizioni	775
12.3.2	Punto stazionario	775
12.3.3	Matrice Hessiana	776
12.3.4	Condizioni sui punti di massimo e minimo relativi	778
12.3.5	Massimi e minimi vincolati	785
Capitolo Tredicesimo Il problema della misura e il calcolo integrale		
13.1	Il problema della misura	795
13.1.1	Introduzione	795
13.1.2	La misura di Peano-Jordan	796
13.1.3	La misura di Vitali-Lebesgue	802
13.2	Integrazione indefinita	804
13.2.1	Definizioni	804
13.2.2	Regole di integrazione	806

XX Indice generale

13.2.3 Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche	812
13.3 Integrazione definita	817
13.3.1 Somma inferiore e somma superiore	817
13.3.2 Dalle somme all'integrale di Riemann	819
13.3.3 Le somme di Cauchy-Riemann	820
13.3.4 Funzioni integrabili	822
13.3.5 Proprietà degli integrali definiti	823
13.3.6 Teoremi sull'integrazione definita	824
13.4 Integrali impropri	829
13.4.1 Caso di un intervallo semi-aperto	829
13.4.2 Caso di un intervallo aperto	830
13.4.3 Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato	831
13.5 Calcolo di volumi di solidi di rotazione	832
13.6 Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione	834

Capitolo Quattordicesimo Serie numeriche, serie di funzioni ed equazioni differenziali

14.1 Serie numeriche	839
14.1.1 Definizioni	839
14.1.2 Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque	841
14.1.3 La serie geometrica	842
14.1.4 Resto di una serie	843
14.1.5 Teoremi generali sul carattere delle serie	845
14.2 Criteri di convergenza delle serie a termini positivi	846
14.2.1 Premessa	846
14.2.2 Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy)	846
14.2.3 La serie di Dirichlet e la serie armonica	847
14.2.4 Criterio del confronto (o di Gauss)	848
14.2.5 Secondo criterio del confronto	849
14.2.6 Criterio del rapporto (o di D'Alembert)	850
14.2.7 Criterio della radice (o di Cauchy)	851
14.3 Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque	852
14.3.1 Criterio di Leibnitz	852
14.3.2 La convergenza assoluta	853
14.3.3 Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque	854
14.4 Sviluppo in serie di funzioni	855
14.4.1 Le serie di funzioni	855
14.4.2 Le serie di potenze	857
14.4.3 La serie di Mac Laurin	859
14.4.4 Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari	861
14.4.5 La formula di Eulero	864
14.4.6 La serie di Taylor	865
14.4.7 Applicazioni della serie di Taylor	866
14.4.8 La serie di Fourier	872

14.5	Equazioni differenziali	876
14.5.1	Generalità	876
14.5.2	Il problema di Cauchy	877
14.6	Equazioni differenziali del primo ordine	879
14.6.1	Generalità	879
14.6.2	Equazioni del primo ordine a variabili separabili	880
14.6.3	Il teorema di Cauchy	883
14.6.4	Equazioni omogenee del primo ordine di Manfredi	885
14.6.5	Equazioni lineari del primo ordine	887
14.6.6	Equazioni di Bernoulli	890
14.6.7	Equazioni di Lagrange	892
14.6.8	Equazioni di Clairaut	894
14.7	Equazioni differenziali di ordine superiore	896
14.7.1	Integrazione immediata	896
14.7.2	Equazioni di secondo ordine prive del termine in y	897
14.7.3	Equazioni di secondo ordine prive del termine in x	899
14.7.4	Equazioni lineari di ordine qualsiasi	900
14.7.5	Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine qualsiasi	905

Capitolo Quindicesimo **Calcolo numerico**

15.1	Errori nel calcolo numerico	913
15.1.1	Premessa	913
15.1.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali	913
15.1.3	I numeri in virgola mobile	915
15.1.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri <i>floating point</i>	917
15.1.5	Arrotondare e troncatura	919
15.1.6	Errore assoluto ed errore relativo	921
15.1.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite	923
15.1.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette	928
15.2	Propagazione dell'errore	929
15.2.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore	929
15.2.2	Problema, algoritmo ed elaboratore	931
15.2.3	Condizionamento di un problema	932
15.2.4	Stabilità di un algoritmo	936
15.3	Interpolazione	939
15.3.1	Formula di interpolazione di Newton	939
15.3.2	Formula di interpolazione di Lagrange	947
15.4	Risoluzione approssimata di equazioni	948
15.4.1	Approccio generale	948
15.4.2	Metodo delle corde	950
15.4.3	Metodo di Newton	954
15.4.4	Metodo di Picard	959
15.5	Integrazione numerica	962
15.5.1	Formula dei trapezi	962
15.5.2	Formula di Simpson	965

Capitolo Sedicesimo Calcolo combinatorio e probabilità

16.1	Calcolo combinatorio	967
16.1.1	Principio di moltiplicazione	967
16.1.2	Fattoriale di un numero	968
16.1.3	Disposizioni con ripetizione	968
16.1.4	Disposizioni	969
16.1.5	Permutazioni	970
16.1.6	Permutazioni con ripetizione	970
16.1.7	Combinazioni	971
16.1.8	Combinazioni con ripetizione	972
16.1.9	Il coefficiente binomiale	972
16.1.10	Formula del binomio di Newton	973
16.1.11	Somma di coefficienti binomiali	974
16.1.12	Il triangolo di Tartaglia	974
16.2	Definire la probabilità	976
16.2.1	Esperimento, insieme universo ed eventi	976
16.2.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi	977
16.2.3	Definizione classica della probabilità	978
16.2.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità	983
16.2.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa)	988
16.2.6	Definizione assiomatica di probabilità	991
16.3	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità	993
16.3.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto	993
16.3.2	Probabilità condizionata e probabilità composta	994
16.3.3	Indipendenza stocastica	997
16.3.4	Formula della probabilità totale	999
16.3.5	Teorema di Bayes	1001
16.4	Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità discrete	1004
16.4.1	Definizione e generalità	1004
16.4.2	Caratteristiche delle variabili aleatorie discrete	1009
16.4.3	La distribuzione binomiale	1012
16.4.4	La distribuzione geometrica	1015
16.4.5	La distribuzione ipergeometrica	1018
16.4.6	La distribuzione di Poisson	1020
16.5	Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità continue	1023
16.5.1	Definizione e generalità	1023
16.5.2	Caratteristiche delle variabili aleatorie continue	1026
16.5.3	Distribuzione uniforme (o rettangolare) continua	1027
16.5.4	Distribuzione esponenziale	1029
16.5.5	Distribuzione normale (o gaussiana)	1034
16.6	Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale	1042
16.6.1	Convergenza in probabilità e legge empirica del caso	1042
16.6.2	Disuguaglianza di Cebysev	1043
16.6.3	La legge dei grandi numeri	1044
16.6.4	Il teorema centrale del limite	1047

Capitolo Diciassettesimo Statistica descrittiva e analisi statistica univariata

17.1	Fasi e strumenti dell'indagine statistica	1049
17.1.1	Popolazioni, caratteri e modalità	1049
17.1.2	Caratteri quantitativi e qualitativi	1050
17.1.3	Intensità, frequenze assolute e relative	1053
17.1.4	Tabelle e distribuzioni	1056
17.1.5	Grafici	1057
17.1.6	Grafici per caratteri qualitativi	1058
17.1.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti	1062
17.1.8	Grafici per caratteri quantitativi continui	1064
17.1.9	Le fasi di una indagine statistica	1067
17.1.10	Analisi statistica univariata	1069
17.2	Indici di posizione	1070
17.2.1	La media aritmetica	1071
17.2.2	La media geometrica	1074
17.2.3	La media armonica	1076
17.2.4	La media quadratica	1078
17.2.5	Relazione tra le medie algebriche	1079
17.2.6	La moda	1079
17.2.7	La mediana	1081
17.2.8	I quantili	1085
17.3	Indici di variabilità	1086
17.3.1	Campo di variabilità e differenze interquantili	1087
17.3.2	Scarto semplice medio	1087
17.3.3	Devianza	1089
17.3.4	Varianza e scarto quadratico medio	1089
17.3.5	Indici di dispersione relativi	1092
17.3.6	Le differenze medie	1093
17.3.7	La concentrazione	1096
17.4	Indici di forma	1103
17.4.1	Asimmetria	1103
17.4.2	Curtosi	1104
17.5	Rapporti statistici	1106
17.5.1	Tipologie di rapporti statistici	1106
17.5.2	I numeri indici	1112
17.5.3	I numeri indici complessi	1117

Capitolo Diciottesimo Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale

18.1	Strumenti dell'analisi statistica bivariata	1119
18.1.1	Tabelle a doppia entrata	1119
18.1.2	Caratteristiche principali delle tabelle a doppia entrata	1122
18.1.3	Grafici per tabelle semplici	1125
18.1.4	Grafici per caratteri quantitativi discreti e per caratteri qualitativi	1126
18.1.5	Grafici per caratteri quantitativi continui	1128

XXIV Indice generale

18.1.6	Indipendenza assoluta	1131
18.1.7	Dipendenza statistica e connessione	1135
18.1.8	Indipendenza in media	1139
18.2	La regressione	1141
18.2.1	L'interpolazione statistica e la regressione	1141
18.2.2	Regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati	1142
18.2.3	Determinare la bontà del modello teorico di correlazione	1149
18.2.4	Regressione lineare con tabelle a doppia entrata	1152
18.2.5	Regressione quadratica e polinomiale con il metodo dei minimi quadrati	1156
18.2.6	Regressione lineare multipla con il metodo dei minimi quadrati	1159
18.3	Statistica inferenziale	1163
18.3.1	Il campione statistico	1163
18.3.2	I parametri, le statistiche e le distribuzioni campionarie	1165
18.3.3	Stima puntuale dei parametri e caratteristiche di un buon estimatore	1171
18.3.4	Stima puntuale del valore medio (o speranza matematica)	1172
18.3.5	Stima puntuale della varianza	1173
18.3.6	Stima intervallare e intervalli di confidenza	1174
18.3.7	Stima puntuale del valore medio (nota la varianza)	1176
18.3.8	Verifica delle ipotesi	1179
18.3.9	Verifica delle ipotesi sul valor medio (nota la varianza)	1179

4

Capitolo Quarto Insiemi numerici

Il sistema numerico adoperato attualmente è il risultato di successivi ampliamenti, mediante i quali, ai numeri inizialmente studiati, sono stati aggiunti nuovi numeri con caratteristiche distinte dai precedenti. Questi ampliamenti sono stati, di volta in volta, necessari per via di sviluppi teorici oppure di applicazioni pratiche che richiedevano nuove definizioni di numeri. In questo capitolo si illustra tale percorso.

4.1 Leggi di composizione interne ed esterne

Si considerino due insiemi A e B , mediante i quali si definisce il prodotto cartesiano $A \times B$. Si può individuare una funzione f che, considerata una coppia $(a, b) \in A \times B$, associa ad essa un elemento $f(a, b) \in B$.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & B \\ (a, b) & \rightarrow & f(a, b) \end{array}$$

In pratica la funzione f compie una operazione sulla coppia (a, b) in modo da far risultare il trasformato $f(a, b)$ nell'insieme B .

La funzione f è detta **operazione esterna** di A su B oppure **legge di composizione esterna** di A su B . Il risultato dell'operazione è in B , ma tale risultato è indotto da elementi di A .

Una legge di **composizione interna** oppure **operazione interna** in un insieme A è una funzione g come la seguente:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{g} & A \\ (a, a') & \rightarrow & g(a, a') \end{array}$$

Questa funzione agisce sulla coppia (a, a') di elementi di A e restituisce un elemento di A , ossia $g(a, a')$.

4.2 L'insieme dei numeri naturali

L'insieme numerico basilare è quello dei numeri naturali, ossia di quei numeri che possono essere osservati in natura. Tale insieme nasce dalla necessità fondamentale di contare gli oggetti esistenti. Un singolo oggetto può essere definito come una **unità**. In realtà i numeri naturali, come le loro successive estensioni, possono essere utilizzati anche in modo astratto, senza necessariamente riferirsi a oggetti realmente esistenti. L'insieme dei **numeri naturali** è indicato con N ed è costituito da una successione ordinata di numeri.

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$$

L'ordine di tale insieme discende proprio dal concetto di unità. I numeri presenti in N sono ordinati in modo che le unità che li costituiscono siano sempre crescenti.

4.2.1 Assiomi di Peano

Si vuole introdurre formalmente (in modo assiomatico) questo insieme numerico. Per farlo si ricorre all'approccio definito dal matematico G. Peano. Gli assiomi di Peano possono essere formulati nel modo seguente.

A1) L'elemento 0 appartiene a N .

Questo assioma serve per stabilire che l'insieme N non è vuoto, ma contiene almeno l'elemento 0.

A2) È possibile definire una funzione iniettiva, detta **successore** e indicata con S , che ha come dominio e codominio N . 0 non è presente nell'immagine di S .

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{S} & N \\ n & \rightarrow & S(n) \end{array} \quad \forall n \in N \mid S(n) \neq 0$$

Con tale funzione si sta formalizzando che per qualsiasi numero naturale n è possibile individuare un numero successivo; inoltre 0 non è il successivo di alcun numero naturale. Pertanto, verrebbe da dire che l'insieme dei numeri naturali è ordinato e che il numero successivo di n è $n + 1$. Per farlo in modo formale, è necessario definire l'operazione di addizione, interna ai numeri naturali.

A3) Considerato un generico sottoinsieme M di N , se avviene che l'elemento $0 \in M$ ed inoltre $\forall n \in M \Rightarrow S(n) \in M$, allora $M = N$.

Quest'ultimo principio è noto come **principio di induzione**. Esso afferma che se un sottoinsieme M di N è tale da contenere lo 0 (in pratica il primo elemento) ed ha la proprietà che il successivo di qualsiasi suo elemento appartiene ancora all'insieme, allora questo insieme coincide proprio con i numeri naturali N .

Di solito il principio di induzione si adotta quando si vuole dimostrare che una determinata proprietà o un determinato asserto A_n , che assume significato per un qualsiasi numero naturale, è vero. Si indica con M l'insieme dei numeri naturali n per i quali vale A_n . Si dimostra innanzitutto che l'asserto A_0 è vero, pertanto $0 \in M$ (**base dell'induzione**). Di seguito, supponendo vero l'asserto A_n (**ipotesi induttiva**), ossia supponendo che $n \in M$, si dimostra che è vero anche l'asserto per il numero successivo $A_{S(n)}$, ossia $S(n) \in M$. In tal modo l'assioma A3 stabilisce che il sottoinsieme M dei numeri naturali per i quali è vera la proprietà (o l'asserto), coincide proprio con i numeri naturali N . In pratica l'asserto A_n è vero per un qualsiasi numero naturale.

In modo analogo, l'assioma A3 è in grado di definire (anziché dimostrare) una nozione o una proprietà per qualsiasi numero naturale. In questo caso si definisce la nozione per lo 0 e, supponendo definita la nozione per n , la si definisce per $S(n)$. La nozione resta definita per qualsiasi numero naturale.

.....

Approfondimento

Si noti che, nella formalizzazione di Peano dei numeri naturali, il **principio di induzione** è dato come **assioma**, pertanto è assunto per vero e non viene dimostrato. Tuttavia, in formalizzazioni dei numeri naturali, alternative a quella di Peano, viene assunto come assioma il principio del **buon ordinamento** dei numeri naturali (per il quale ogni sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo). In questo caso, il principio di induzione viene dimostrato, avvalendosi dell'ipotesi del buon ordinamento. Nell'approccio di Peano, viceversa, il principio di induzione serve per dimostrare il buon ordinamento dei numeri naturali (come si vedrà nel Par. 4.2.4). Le due teorie dei numeri naturali così create sono perfettamente equivalenti. Pertanto si può affermare che il principio di induzione e quello di buon ordinamento sono equivalenti.

Secondo quanto mostrato nel Cap. 1, nella formalizzazione di una teoria si possono anche non assumere per veri assiomi intuitivi e dettati dall'esperienza come il principio di induzione. In particolare, se non si assume per vero il principio di induzione (o altri principi ad esso equivalenti), mantenendo veri tutti gli altri assiomi della formalizzazione di Peano (detta **Aritmetica di Peano**), si formula una aritmetica alternativa, detta **Aritmetica di Robinson**.

.....

4.2.2 Addizione di naturali

Si consideri un numero naturale m . Occorre definire la **somma** di m con un qualsiasi numero naturale n . Per farlo, usando il principio di induzione, occorre definire la somma di m con 0. Inoltre, considerando definita la somma di m con n , si deve definire la somma di m con il successivo $S(n)$. Pertanto si ipotizza quanto segue:

AS1) $m + 0 = m$

AS2) considerando definita $m + n$, si ha $m + S(n) = S(m + n)$

A questo punto si definisce il successivo di 0, ossia 1, semplicemente ponendo $S(0) = 1$.

In tal modo, resta definito anche il successivo di m :

$$S(m) = S(m + 0) = m + S(0) = m + 1$$

Nel primo passaggio si è utilizzata l'ipotesi AS1, nel secondo passaggio è utilizzata l'ipotesi AS2 e nel terzo la definizione di successivo di 0.

Si definisce quindi l'**addizione** + come l'operazione che associa ad una coppia di numeri naturali m e n , ossia (m, n) la loro somma $m + n$, definita mediante il principio di induzione.

$$\begin{array}{ccc} N \times N & \xrightarrow{+} & N \\ (m, n) & \rightarrow & m + n \end{array}$$

Teorema 1

Siano $m, n, l \in \mathbb{N}$, allora l'operazione di addizione possiede le seguenti proprietà:

PS1) $(m + n) + l = m + (n + l)$	proprietà associativa
PS2) $m + 0 = m = 0 + m$	esistenza dell'elemento neutro
PS3) $m + n = n + m$	proprietà commutativa

DIM

PS1) Tale proprietà vale per $l = 0$, infatti $(m + n) + 0 = m + n = m + (n + 0)$. In tale dimostrazione si è usata la AS1 della somma.

La proprietà associativa si suppone valida per un generico l e viene dimostrata per $S(l)$.

$(m + n) + S(l) = S((m + n) + l)$	AS2 della somma
$S((m + n) + l) = S(m + (n + l))$	ipotesi induttiva
$S(m + (n + l)) = m + S(n + l)$	AS2 della somma
$m + S(n + l) = m + (n + S(l))$	AS2 della somma

PS2) La relazione $m + 0 = m$ è vera per definizione (AS1), mentre occorre dimostrare $0 + m = m$. Se $m = 0$, allora tale relazione è banalmente vera.

Si suppone vera la relazione $0 + m = m$ e si dimostra per $0 + S(m) = S(m)$. Infatti:

$0 + S(m) = S(0 + m)$	AS2 della somma
$S(0 + m) = S(m)$	ipotesi induttiva

PS3) La proprietà commutativa è stata dimostrata per l'elemento $m = 0$, al punto precedente (base dell'induzione). Ritenendo vera la proprietà per m (ipotesi induttiva), occorre dimostrarla per $S(m)$. L'attenzione si sposta quindi sull'altro addendo n . La proprietà è valida se $n = 0$, infatti $S(m) + 0 = 0 + S(m)$ sempre per quanto dimostrato per l'elemento neutro. Ora, supponendo vera la proprietà per n , ossia supponendo valida la relazione $S(m) + n = n + S(m)$, occorre dimostrarla per $S(n)$. Pertanto occorre dimostrare che $S(m) + S(n) = S(n) + S(m)$.

$S(m) + S(n) = S(S(m) + n)$	AS2 della somma
$S(S(m) + n) = S(n + S(m))$	ipotesi induttiva
$S(n + S(m)) = S(S(n + m))$	AS2 della somma
$S(S(n + m)) = S(S(m + n))$	ipotesi induttiva
$S(S(m + n)) = S(m + S(n))$	AS2 della somma
$S(m + S(n)) = S(S(n) + m)$	ipotesi induttiva
$S(S(n) + m) = S(n) + S(m)$	AS2 della somma

CVD

Mediante il principio di induzione, la definizione di somma e le proprietà dell'addizione, è possibile dimostrare anche altre proprietà della somma.

La collana è rivolta a quanti desiderano acquisire l'**abilitazione all'insegnamento** nelle scuole e che devono pertanto superare gli esami di ammissione previsti dalla normativa sulla formazione del personale docente.

Matematica

manuale per prove scritte e orali

Il testo punta ad una trattazione rigorosa ma essenziale, funzionale ad una **rapida revisione** delle conoscenze pregresse e può essere utilmente affiancato dagli eserciziari della stessa collana.

Nella **prima parte** vengono inquadrati gli **aspetti ordinamentali** correlati all'insegnamento della disciplina così come emergono dalle Indicazioni Nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. La **seconda parte** è dedicata ai **contenuti disciplinari**.

Il volume è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.



Per completare la preparazione:


t&e **Competenze linguistiche e comprensione testi**
ISBN 9788865841549

e11 **Matematica e fisica - esercizi commentati**
ISBN 9788865843840

 sfoglia le demo su edises.it

Per essere sempre aggiornato seguici su Facebook 

facebook.com/ltirocinioformativoattivo

Clicca su mi piace  per ricevere gli aggiornamenti.



www.edises.it
info@edises.it



€ 52,00

