tfa tirocinio **formativo** attivo

# Matematica

## manuale per prove scritte e orali

per le classi di abilitazione

**A047** Matematica

**A049** Matematica e Fisica

Comprende **software** per effettuare infinite esercitazioni

EdiSES

TFA

# Matematica

## Manuale teorico

per le classi di abilitazione

A047 Matematica
A049 Matematica e Fisica

**Accedi ai servizi riservati**

Il **codice personale** contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai nostri clienti. Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a

**Infinite esercitazioni on-line**

**codice personale**

Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.
Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate a pagina iv
Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile
L'accesso ai servizi riservati ha la durata di un anno dall'attivazione del codice

EdiSES

TFA – Matematica – Manuale teorico


9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2018 2017 2016 2015 2014

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*



*Grafica di copertina a cura di* curvilinee

*Progetto grafico*: ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

*Fotocomposizione*: EdiSES S.r.l. – Napoli

*Fotoincisione*: R.ES. Centro Prestampa S.n.c. – Napoli

*Stampato presso* Litografia di Enzo Celebrano – Pozzuoli (Napoli)

*per conto della* EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

http://www.edises.it
e-mail: info@edises.it

ISBN 978 88 6584 446 5

# Sommario

## PARTE PRIMA
## LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA



## PARTE SECONDA
## CONTENUTI DISCIPLINARI

# Premessa

Il presente lavoro è concepito come supporto per quanti si accingono ad affrontare le prove di selezione del tirocinio formativo attivo e costituisce un valido strumento di ausilio per tutti coloro che intendono intraprendere la professione docente.
L'opera è divisa in due parti: la prima è di carattere metodologico-didattico ed ordinamentale, mentre la seconda affronta i contenuti della disciplina, così come proposti nelle attuali Indicazioni e Linee guida dell'istruzione secondaria.
Nella **prima parte** viene presentato il quadro ordinamentale specifico della matematica e vengono proposte delle problematiche reali di gestione dei tempi e della classe che il docente deve affrontare nell'attività didattica; vengono, inoltre, illustrate diverse metodologie didattiche alla luce delle distinte teorie dell'apprendimento. Vi è infine una particolare attenzione nel presentare le nuove tecnologie per la didattica, dalla LIM (la lavagna interattiva multimediale) ai software specifici per la matematica (geometria dinamica, calcolo simbolico). In questa fase si forniscono anche diversi spunti ed idee per attività da svolgere in classe. In ogni caso, la didattica e l'approccio laboratoriale alla disciplina costituiscono l'aspetto fondante e il denominatore comune di questa parte del volume.
Nella **seconda parte** si cerca di affrontare i contenuti della disciplina nel modo più compendioso e completo possibile, in relazione anche alla necessità di contenere l'estensione del volume. Si è cercato di fornire sia approcci formali e rigorosi, sia approcci più pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può aver affrontato. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.

Il volume è completato da un software di simulazione, accessibile dall'area riservata, mediante cui effettuare esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.

Eventuali aggiornamenti normativi, ma anche materiali didattici integrativi, saranno resi disponibili nell'apposita area riservata.

**Istruzioni per l'accesso all'area riservata**

Tutti i materiali e i servizi associati al volume sono accessibili dall'**area riservata** che si attiva mediante registrazione al sito

---

**Se sei già registrato al sito**

Collegati a www.edises.it
Clicca su "Accedi al materiale didattico"
Inserisci user e password
Inserisci le ultime 4 cifre dell'ISBN del volume in tuo possesso riportate in basso a destra sul retro di copertina
Inserisci il codice personale che trovi sul frontespizio del volume
Verrai automaticamente reindirizzato alla tua area personale

**Se non sei registrato al sito**

Collegati a www.edises.it
Clicca su "Accedi al materiale didattico"
Seleziona "Se non sei ancora registrato Clicca qui"
Completa il form in ogni sua parte e al termine attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
Dopo aver cliccato sul link presente nell'email di conferma, verrai reindirizzato al sito EdiSES
A questo punto potrai seguire la procedura descritta per gli utenti registrati al sito

---

***Attenzione!*** Questa procedura è necessaria solo per il primo accesso.
Successivamente, basterà loggarsi – cliccando su "entra" in alto a destra da qualsiasi pagina del sito ed inserendo le proprie credenziali (user e password) – per essere automaticamente reindirizzati alla propria area personale.

Potete segnalarci i vostri suggerimenti o sottoporci le vostre osservazioni all'indirizzo **redazione@edises.it**

Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei supporti multimediali potete contattare la nostra assistenza tecnica all'indirizzo **support@edises.it**

# Indice generale

## PARTE PRIMA
## LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

## PARTE SECONDA
## CONTENUTI DISCIPLINARI

## Capitolo Sedicesimo Calcolo combinatorio e probabilità

## Capitolo Diciassettesimo Statistica descrittiva e analisi statistica univariata



## Capitolo Diciottesimo Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale

# 4 Capitolo Quarto
# Insiemi numerici

Il sistema numerico adoperato attualmente è il risultato di successivi ampliamenti, mediante i quali, ai numeri inizialmente studiati, sono stati aggiunti nuovi numeri con caratteristiche distinte dai precedenti. Questi ampliamenti sono stati, di volta in volta, necessari per via di sviluppi teorici oppure di applicazioni pratiche che richiedevano nuove definizioni di numeri. In questo capitolo si illustra tale percorso.

## 4.1 Leggi di composizione interne ed esterne

Si considerino due insiemi $A$ e $B$, mediante i quali si definisce il prodotto cartesiano $A \times B$. Si può individuare una funzione $f$ che, considerata una coppia $(a,b) \in A \times B$, associa ad essa un elemento $f(a,b) \in B$.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & B \\ (a,b) & \rightarrow & f(a,b) \end{array}$$

In pratica la funzione $f$ compie una operazione sulla coppia $(a,b)$ in modo da far risultare il trasformato $f(a,b)$ nell'insieme $B$.
La funzione $f$ è detta **operazione esterna** di $A$ su $B$ oppure **legge di composizione esterna** di $A$ su $B$. Il risultato dell'operazione è in $B$, ma tale risultato è indotto da elementi di $A$.
Una legge di **composizione interna** oppure **operazione interna** in un insieme $A$ è una funzione $g$ come la seguente:

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{g} & A \\ (a,a') & \rightarrow & g(a,a') \end{array}$$

Questa funzione agisce sulla coppia $(a,a')$ di elementi di $A$ e restituisce un elemento di $A$, ossia $g(a,a')$.

## 4.2 L'insieme dei numeri naturali

L'insieme numerico basilare è quello dei numeri naturali, ossia di quei numeri che possono essere osservati in natura. Tale insieme nasce dalla necessità fondamentale di contare gli oggetti esistenti. Un singolo oggetto può essere definito come una **unità**. In realtà i numeri naturali, come le loro successive estensioni, possono essere utilizzati anche in modo astratto, senza necessariamente riferirsi a oggetti realmente esistenti. L'insieme dei **numeri naturali** è indicato con $N$ ed è costituito da una successione ordinata di numeri.

$$N = \{0,1,2,3,\ldots,n-1,n,n+1,\ldots\}$$

L'ordine di tale insieme discende proprio dal concetto di unità. I numeri presenti in $N$ sono ordinati in modo che le unità che li costituiscono siano sempre crescenti.

## 4.2.1 Assiomi di Peano

Si vuole introdurre formalmente (in modo assiomatico) questo insieme numerico. Per farlo si ricorre all'approccio definito dal matematico G. Peano. Gli assiomi di Peano possono essere formulati nel modo seguente.

A1) L'elemento 0 appartiene a $N$.
Questo assioma serve per stabilire che l'insieme $N$ non è vuoto, ma contiene almeno l'elemento 0.

A2) È possibile definire una funzione iniettiva, detta **successore** e indicata con $S$, che ha come dominio e codominio $N$. 0 non è presente nell'immagine di $S$.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{s} & N \\ n & \rightarrow & S(N) \end{array} \qquad \forall\, n \in N \mid S(n) \neq 0$$

Con tale funzione si sta formalizzando che per qualsiasi numero naturale $n$ è possibile individuare un numero successivo; inoltre 0 non è il successivo di alcun numero naturale. Pertanto, verrebbe da dire che l'insieme dei numeri naturali è ordinato e che il numero successivo di $n$ è $n + 1$. Per farlo in modo formale, è necessario definire l'operazione di addizione, interna ai numeri naturali.

A3) Considerato un generico sottoinsieme $M$ di $N$, se avviene che l'elemento $0 \in M$ ed inoltre $\forall n \in M \Rightarrow S(n) \in M$, allora $M = N$.
Quest'ultimo principio è noto come **principio di induzione**. Esso afferma che se un sottoinsieme $M$ di $N$ è tale da contenere lo 0 (in pratica il primo elemento) ed ha la proprietà che il successivo di qualsiasi suo elemento appartiene ancora all'insieme, allora questo insieme coincide proprio con i numeri naturali $N$.
Di solito il principio di induzione si adotta quando si vuole dimostrare che una determinata proprietà o un determinato asserto $A_n$, che assume significato per un qualsiasi numero naturale, è vero. Si indica con $M$ l'insieme dei numeri naturali $n$ per i quali vale $A_n$. Si dimostra innanzitutto che l'asserto $A_0$ è vero, pertanto $0 \in M$ (**base dell'induzione**). Di seguito, supponendo vero l'asserto $A_n$ (**ipotesi induttiva**), ossia supponendo che $n \in M$, si dimostra che è vero anche l'asserto per il numero successivo $A_{S(n)}$, ossia $S(n) \in M$. In tal modo l'assioma A3 stabilisce che il sottoinsieme $M$ dei numeri naturali per i quali è vera la proprietà (o l'asserto), coincide proprio con i numeri naturali $N$. In pratica l'asserto $A_n$ è vero per un qualsiasi numero naturale.

In modo analogo, l'assioma A3 è in grado di definire (anziché dimostrare) una nozione o una proprietà per qualsiasi numero naturale. In questo caso si definisce la nozione per lo 0 e, supponendo definita la nozione per $n$, la si definisce per $S(n)$. La nozione resta definita per qualsiasi numero naturale.

**Approfondimento**

Si noti che, nella formalizzazione di Peano dei numeri naturali, il **principio di induzione** è dato come **assioma**, pertanto è assunto per vero e non viene dimostrato. Tuttavia, in formalizzazioni dei numeri naturali, alternative a quella di Peano, viene assunto come assioma il principio del **buon ordinamento** dei numeri naturali (per il quale ogni sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo). In questo caso, il principio di induzione viene dimostrato, avvalendosi dell'ipotesi del buon ordinamento. Nell'approccio di Peano, viceversa, il principio di induzione serve per dimostrare il buon ordinamento dei numeri naturali (come si vedrà nel Par. 4.2.4). Le due teorie dei numeri naturali così create sono perfettamente equivalenti. Pertanto si può affermare che il principio di induzione e quello di buon ordinamento sono equivalenti.

Secondo quanto mostrato nel Cap. 1, nella formalizzazione di una teoria si possono anche non assumere per veri assiomi intuitivi e dettati dall'esperienza come il principio di induzione. In particolare, se non si assume per vero il principio di induzione (o altri principi ad esso equivalenti), mantenendo veri tutti gli altri assiomi della formalizzazione di Peano (detta **Aritmetica di Peano**), si formula una aritmetica alternativa, detta **Aritmetica di Robinson**.

## 4.2.2 Addizione di naturali

Si consideri un numero naturale $m$. Occorre definire la **somma** di $m$ con un qualsiasi numero naturale $n$. Per farlo, usando il principio di induzione, occorre definire la somma di $m$ con 0. Inoltre, considerando definita la somma di $m$ con $n$, si deve definire la somma di $m$ con il successivo $S(n)$. Pertanto si ipotizza quanto segue:

AS1) $m + 0 = m$

AS2) considerando definita $m + n$, si ha $m + S(n) = S(m + n)$

A questo punto si definisce il successivo di 0, ossia 1, semplicemente ponendo $S(0) = 1$.

In tal modo, resta definito anche il successivo di $m$:

$$S(m) = S(m + 0) = m + S(0) = m + 1$$

Nel primo passaggio si è utilizzata l'ipotesi AS1, nel secondo passaggio è utilizzata l'ipotesi AS2 e nel terzo la definizione di successivo di 0.

Si definisce quindi l'**addizione** + come l'operazione che associa ad una coppia di numeri naturali $m$ e $n$, ossia $(m,n)$ la loro somma $m + n$, definita mediante il principio di induzione.

$$\begin{array}{ccc} N \times N & \xrightarrow{+} & N \\ (m,n) & \to & m+n \end{array}$$

**Teorema 1**

Siano $m, n, l \in N$, allora l'operazione di addizione possiede le seguenti proprietà:

| | |
|---|---|
| PS1) $(m + n) + l = m + (n + l)$ | proprietà associativa |
| PS2) $m + 0 = m = 0 + m$ | esistenza dell'elemento neutro |
| PS3) $m + n = n + m$ | proprietà commutativa |

**DIM**

PS1) Tale proprietà vale per $l = 0$, infatti $(m + n) + 0 = m + n = m + (n + 0)$. In tale dimostrazione si è usata la AS1 della somma.
La proprietà associativa si suppone valida per un generico $l$ e viene dimostrata per $S(l)$.

| | |
|---|---|
| $(m + n) + S(l) = S((m + n) + l)$ | AS2 della somma |
| $S((m + n) + l) = S(m + (n + l))$ | ipotesi induttiva |
| $S(m + (n + l)) = m + S(n + l)$ | AS2 della somma |
| $m + S(n + l) = m + (n + S(l))$ | AS2 della somma |

PS2) La relazione $m + 0 = m$ è vera per definizione (AS1), mentre occorre dimostrare $0 + m = m$. Se $m = 0$, allora tale relazione è banalmente vera.
Si suppone vera la relazione $0 + m = m$ e si dimostra per $0 + S(m) = S(m)$. Infatti:

| | |
|---|---|
| $0 + S(m) = S(0 + m)$ | AS2 della somma |
| $S(0 + m) = S(m)$ | ipotesi induttiva |

PS3) La proprietà commutativa è stata dimostrata per l'elemento $m = 0$, al punto precedente (base dell'induzione). Ritenendo vera la proprietà per $m$ (ipotesi induttiva), occorre dimostrarla per $S(m)$. L'attenzione si sposta quindi sull'altro addendo $n$. La proprietà è valida se $n = 0$, infatti $S(m) + 0 = 0 + S(m)$ sempre per quanto dimostrato per l'elemento neutro. Ora, supponendo vera la proprietà per $n$, ossia supponendo valida la relazione $S(m) + n = n + S(m)$, occorre dimostrarla per $S(n)$. Pertanto occorre dimostrare che $S(m) + S(n) = S(n) + S(m)$.

| | |
|---|---|
| $S(m) + S(n) = S(S(m) + n)$ | AS2 della somma |
| $S(S(m) + n) = S(n + S(m))$ | ipotesi induttiva |
| $S(n + S(m)) = S(S(n + m))$ | AS2 della somma |
| $S(S(n + m)) = S(S(m + n))$ | ipotesi induttiva |
| $S(S(m + n)) = S(m + S(n))$ | AS2 della somma |
| $S(m + S(n)) = S(S(n) + m)$ | ipotesi induttiva |
| $S(S(n) + m) = S(n) + S(m)$ | AS2 della somma |

**CVD**

Mediante il principio di induzione, la definizione di somma e le proprietà dell'addizione, è possibile dimostrare anche altre proprietà della somma.

tfa tirocinio **formativo** attivo

La collana è rivolta a quanti desiderano acquisire l'**abilitazione all'insegnamento** nelle scuole e che devono pertanto superare gli esami di ammissione previsti dalla normativa sulla formazione del personale docente.

# Matematica

## manuale per prove scritte e orali

Il testo punta ad una trattazione rigorosa ma essenziale, funzionale ad una **rapida revisione** delle conoscenze pregresse e può essere utilmente affiancato dagli eserciziari della stessa collana.
Nella **prima parte** vengono inquadrati gli **aspetti ordinamentali** correlati all'insegnamento della disciplina così come emergono dalle Indicazioni Nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. La **seconda parte** è dedicata ai **contenuti disciplinari**.

Il volume è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.

t11

**Per completare la preparazione:**

t&e **Competenze linguistiche e comprensione testi**
ISBN 9788865841549

e11 **Matematica e fisica** - esercizi commentati
ISBN 9788865843840

sfoglia le demo su **edises.it**



EdiSES www.edises.it info@edises.it

€ 52,00

ISBN 978-88-6584-446-5