

tfa tirocinio **formativo** attivo

Matematica applicata

manuale per prove scritte e orali

per la classe di abilitazione

A048 Matematica applicata



Comprende **software**
per effettuare infinite
esercitazioni


EdiSES

TFA

Matematica applicata

Manuale teorico

per la classe di abilitazione

A048 Matematica applicata per gli istituti di istruzione secondaria di II grado



Accedi ai servizi riservati

Il **codice personale** contenuto nel riquadro dà diritto a servizi riservati ai nostri clienti. Registrandosi al sito, dalla propria area riservata si potrà accedere a

Infinite esercitazioni on-line

codice personale



Grattare delicatamente la superficie per visualizzare il codice personale.

Le **istruzioni per la registrazione** sono riportate a pagina iv

Il volume NON può essere venduto né restituito se il codice personale risulta visibile

L'accesso ai servizi riservati ha la durata di un anno dall'attivazione del codice



TFA – Matematica applicata – Manuale teorico
Copyright © 2014, EdiSES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2018 2017 2016 2015 2014

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione,
anche parziale, del presente volume o
di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Grafica di copertina a cura di  curvilinee

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

Fotocomposizione: EdiSES S.r.l.

Stampato presso Tipolitografia Petruzzi Corrado & Co. S.n.C. – Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG)

per conto della EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 6584 457 1

<http://www.edises.it>
e-mail: info@edises.it

Premessa

Il presente lavoro è concepito come supporto per quanti si accingono ad affrontare le prove di selezione del tirocinio formativo attivo e costituisce un valido strumento di ausilio per tutti coloro che intendono intraprendere la professione docente.

Il volume è strutturato in due parti. La **prima parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La **seconda parte** tratta le questioni fondamentali della **Matematica Finanziaria e Attuariale** e della **Ricerca Operativa**. Chiude il volume un'utile **Appendice** sulle principali figure della storia della Matematica e della Matematica applicata.

Il volume è completato da un software di simulazione, accessibile dall'area riservata, mediante cui effettuare esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.

Eventuali aggiornamenti normativi, ma anche materiali didattici integrativi, saranno resi disponibili nell'apposita area riservata.

Istruzioni per l'accesso all'area riservata

Tutti i materiali e i servizi associati al volume sono accessibili dall'**area riservata** che si attiva mediante registrazione al sito

Se sei già registrato al sito

Collegati a www.edises.it
Clicca su “Accedi al materiale didattico”
Inserisci user e password
Inserisci le ultime 4 cifre dell'ISBN del volume in tuo possesso riportate in basso a destra sul retro di copertina
Inserisci il codice personale che trovi sul frontespizio del volume
Verrai automaticamente reindirizzato alla tua area personale

Se non sei registrato al sito

Collegati a www.edises.it
Clicca su “Accedi al materiale didattico”
Seleziona “Se non sei ancora registrato”
Clicca qui”
Completa il form in ogni sua parte e al termine attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
Dopo aver cliccato sul link presente nell'email di conferma, verrai reindirizzato al sito Edises
A questo punto potrai seguire la procedura descritta per gli utenti registrati al sito

Attenzione! Questa procedura è necessaria solo per il primo accesso. Successivamente, basterà loggarsi – cliccando su “entra” in alto a destra da qualsiasi pagina del sito ed inserendo le proprie credenziali (user e password) – per essere automaticamente reindirizzati alla propria area personale.



Potete segnalarci i vostri suggerimenti o sottoporci le vostre osservazioni all'indirizzo **redazione@edises.it**



Per problemi tecnici connessi all'utilizzo dei supporti multimediali potete contattare la nostra assistenza tecnica all'indirizzo **support@edises.it**

Gli Autori

Emiliano Barbuto, docente di Matematica e Fisica, ha partecipato ad esperimenti di fisica nucleare presso il CERN di Ginevra e i Laboratori del Gran Sasso. È autore di numerose pubblicazioni di carattere didattico e divulgativo sulla matematica. Esperto di software applicativi, ha scritto testi di alfabetizzazione informatica.

Santo Calabrese, docente di Matematica Applicata. Per cinque anni ha fatto parte di una équipe presso l'I.R.R.S.A.E – Sicilia per l'aggiornamento degli Insegnanti della scuola primaria in seguito ai *Nuovi Programmi* del 1985 (che introdussero *Elementi di Informatica, Statistica e Calcolo delle Probabilità* nei programmi della Scuola Elementare). Attualmente, oltre ad insegnare presso un I.T.E., ricopre fra l'altro i seguenti incarichi: Docente di Didattica della Matematica Applicata (I ciclo TFA), Tutor coordinatore TFA di Matematica Applicata A048 presso l'Università di Palermo, Esperto di Valutazione Esterna delle Scuole presso INVALSI. Cura il sito www.mafiah.it, dedicato alla pubblicazione di esercizi svolti di Matematica Finanziaria, Analisi Matematica e Statistica per studenti universitari.

Indice generale

PARTE PRIMA MATEMATICA

Capitolo Primo Insiemi, relazioni e funzioni

1.1	Concetti fondamentali	3
1.2	Relazione di inclusione	4
1.3	Operazioni tra insiemi	5
1.4	Insieme delle parti	8
1.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano	8
1.6	Relazione binaria	9
1.7	Relazioni di equivalenza	11
1.8	Relazioni d'ordine largo	12
1.9	Relazioni d'ordine stretto	13
1.10	Funzioni	13
1.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive	15
1.12	Funzioni composte	17
1.13	Funzione inversa e identità	17
1.14	Cardinalità di un insieme	18
1.14.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali	18
1.14.2	Operazioni tra numeri cardinali	19
1.14.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili	20
1.14.4	Insiemi numerici numerabili	22
1.14.5	Insiemi numerici non numerabili	25
1.14.6	L'ipotesi del continuo	29
1.15	Calcolo combinatorio	30
1.15.1	Principio di moltiplicazione	30
1.15.2	Fattoriale di un numero	31
1.15.3	Disposizioni con ripetizione	31
1.15.4	Disposizioni	32
1.15.5	Permutazioni	33
1.15.6	Permutazioni con ripetizione	33
1.15.7	Combinazioni	34
1.15.8	Combinazioni con ripetizione	35
1.15.9	Il coefficiente binomiale	35
1.15.10	Formula del binomio di Newton	36
1.15.11	Somma di coefficienti binomiali	37
1.15.12	Il triangolo di Tartaglia	37
1.16	Il metodo assiomatico	39
1.16.1	Le teorie matematiche	39
1.16.2	La definizione dei termini	39

VIII Indice generale

1.16.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali	40
--------	---	----

Capitolo Secondo Geometria euclidea, geometrie non euclidee e trigonometria

2.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide	43
2.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide	43
2.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i>	43
2.1.3	Il quinto postulato di Euclide	46
2.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i>	47
2.2	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano	51
2.2.1	Trasformazioni affini	51
2.2.2	Affinità	55
2.2.3	Proprietà delle affinità	56
2.2.4	Punti uniti di una trasformazione	60
2.2.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo	63
2.2.6	Particolari similitudini: omotetie	68
2.2.7	Isometrie	71
2.2.8	Isometrie dirette	72
2.2.9	Isometrie inverse	80
2.2.10	Riepilogo	84
2.3	L'idea della geometria proiettiva	86
2.3.1	La prospettiva	86
2.3.2	La retta proiettiva	86
2.3.3	Il piano proiettivo	89
2.3.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo	93
2.3.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio	95
2.3.6	Definizione operativa di spazio proiettivo	95
2.4	Operare con le coordinate omogenee	97
2.4.1	Rette nel piano	97
2.4.2	Coniche in coordinate omogenee	99
2.5	Le proiettività	101
2.5.1	Proiettività sulla retta proiettiva	101
2.5.2	Punti uniti	102
2.5.3	Il birapporto	105
2.5.4	Proiettività sul piano	107
2.5.5	Punti uniti e rette unite	110
2.5.6	Studio della prospettiva	116

Capitolo Terzo Insiemi numerici

3.1	Leggi di composizione interne ed esterne	123
3.2	L'insieme dei numeri naturali	123
3.2.1	Assiomi di Peano	124
3.2.2	Addizione di naturali	125
3.2.3	Moltiplicazione di naturali	127
3.2.4	Relazione d'ordine nei naturali	128
3.2.5	La divisione euclidea	129
3.2.6	La potenza	131

3.3	Rappresentazione dei numeri naturali	131
3.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali	131
3.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma	132
3.3.3	Il sistema di numerazione decimale	133
3.3.4	Il sistema di numerazione binario	134
3.3.5	Conversioni	135
3.4	L'insieme dei numeri interi	136
3.5	I numeri razionali	140
3.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali	140
3.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali	141
3.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali	142
3.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali	143
3.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali	145
3.6.1	La scrittura posizionale	145
3.6.2	L'estrazione di radice	145
3.6.3	Le grandezze incommensurabili	145
3.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi	147
3.6.5	La quadratura del cerchio	148
3.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali	148
3.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale	148
3.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind	148
3.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali	152
3.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti	152
3.8.1	I numeri irrazionali	152
3.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici	153
3.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti	154
3.9	Le strutture algebriche	155
3.9.1	Definizione di struttura algebrica	155
3.9.2	Proprietà associativa e semigrupp	155
3.9.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi	156
3.10	I gruppi	157
3.10.1	Esistenza dell'elemento inverso	157
3.10.2	Definizione di gruppo	157
3.10.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani	158
3.10.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori	159
3.11	Aritmetica modulare	160
3.11.1	Congruenza modulo n	160
3.11.2	Teoremi dell'aritmetica modulare	160
3.11.3	Classi di congruenza modulo n e insieme quoziente	161
3.11.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza	162
3.12	Gruppi ciclici	164
3.12.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi	164
3.12.2	Gruppi additivi	165
3.12.3	Gruppi moltiplicativi	165
3.13	Tavole di Cayley	167
3.14	Prodotto di gruppi	168

X **Indice generale**

3.15	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro	169
3.15.1	Definizione di sottogruppo	169
3.15.2	Classi laterali	169
3.15.3	Sottogruppi normali	171
3.16	Gruppi risolubili	175
3.17	I gruppi simmetrici	176
3.17.1	Permutazioni	176
3.17.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni	177
3.17.3	Cicli e trasposizioni	178
3.17.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno	182
3.17.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici S_2 , S_3 e S_4	183
3.17.6	Il gruppo simmetrico S_5	185
3.18	Gruppo diedrale	186
3.18.1	Definizione	186
3.18.2	Interpretazione geometrica	187
3.19	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi	192
3.20	Anelli	196
3.20.1	Definizione	196
3.20.2	Anello dei polinomi	197
3.21	Corpi e campi	199
3.21.1	Definizioni	199
3.21.2	Estensione di un campo	200
3.21.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa)	202
3.22	Teoria di Galois	204
3.22.1	L'idea	204
3.22.2	Gruppo di Galois	205
3.22.3	Risolvibilità per radicali di un'equazione di grado n	207

Capitolo Quarto Il metodo delle coordinate

4.1	Gli spazi vettoriali	209
4.1.1	Definizione di spazio vettoriale	209
4.1.2	Sottospazio	212
4.1.3	Combinazione lineare di vettori	213
4.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare	214
4.1.5	Generatori e basi	215
4.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale	217
4.2	Applicazioni lineari	218
4.2.1	Definizione di applicazione lineare	218
4.2.2	Composizione di applicazioni lineari	219
4.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari	219
4.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare	220
4.2.5	Particolari applicazioni lineari	221
4.3	Matrici	222
4.3.1	Definizioni	222
4.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici	223
4.3.3	Moltiplicazione tra matrici	226
4.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari	231

4.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari	235
4.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili	235
4.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici	236
4.4	Determinanti	236
4.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice	236
4.4.2	Proprietà del determinante di una matrice	242
4.4.3	Rango di una matrice	245
4.5	Sistemi lineari	249
4.5.1	Definizione di sistema lineare	249
4.5.2	Sistemi lineari compatibili	250
4.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati	251
4.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici	252
4.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema	253
4.5.6	Matrice inversa	259
4.5.7	Sistemi lineari omogenei	262
4.6	Diagonalizzazione di matrici	265
4.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio	265
4.6.2	Matrici diagonalizzabili	266
4.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici	267
4.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione	269
4.6.5	Segnatura di una matrice	269
4.7	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo	275
4.8	Geometria analitica nel piano	277
4.8.1	Punti nel piano cartesiano	277
4.8.2	Vettori nel piano cartesiano	278
4.8.3	Le curve algebriche	281
4.9	Curve algebriche di primo grado: le rette	282
4.9.1	Equazione di una retta in forma parametrica	282
4.9.2	Equazione di una retta in forma implicita	283
4.9.3	Intersezione di due rette	283
4.9.4	Rette: casi particolari	286
4.9.5	Equazione della retta in forma segmentaria	287
4.9.6	Equazione della retta in forma esplicita	288
4.9.7	Fasci di rette	289
4.9.8	Alcune relazioni utili sulla retta	291
4.10	Curve algebriche di secondo grado: le coniche	293
4.10.1	Classificazione di una conica	293
4.10.2	Riduzione a forma normale di una conica	296
4.10.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde	302
4.11	Geometria analitica nello spazio	304
4.11.1	Punti nello spazio	304
4.11.2	Vettori nello spazio	305
4.12	Superfici algebriche di primo grado: i piani	309
4.12.1	Equazione parametrica del piano	309
4.12.2	Equazione generale del piano	309
4.12.3	Equazioni di piani particolari	313
4.12.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo	314
4.13	Le rette nello spazio	315

XII Indice generale

4.13.1	Equazioni parametriche della retta	315
4.13.2	Equazioni normali della retta	316
4.13.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta	316
4.13.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli)	320
4.13.5	Rette parallele e perpendicolari	321
4.13.6	Piani paralleli e perpendicolari	323
4.13.7	Rette e piani perpendicolari	323
4.13.8	Distanza di un punto da un piano	324
4.14	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche	324
4.14.1	Classificazione di una quadrica	324

Capitolo Quinto Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

5.1	Intervalli e intorni	331
5.1.1	Tipologie di intervalli	331
5.1.2	Intorni e intorni circolari	333
5.2	Funzioni reali di variabili reali	333
5.2.1	Generalità	333
5.2.2	Campo di esistenza ed immagine	335
5.2.3	Funzioni composte	336
5.2.4	Funzioni invertibili	336
5.2.5	Funzioni monotone	337
5.2.6	Funzioni pari e dispari	340
5.2.7	Funzioni periodiche	341
5.2.8	Funzioni elementari	342
5.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali	349
5.3	Errori nel calcolo numerico	351
5.3.1	Premessa	351
5.3.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali	351
5.3.3	I numeri in virgola mobile	353
5.3.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri <i>floating point</i>	355
5.3.5	Arrotondare e troncare	357
5.3.6	Errore assoluto ed errore relativo	359
5.3.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite	361
5.3.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette	365
5.4	Propagazione dell'errore	366
5.4.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore	366
5.4.2	Problema, algoritmo ed elaboratore	368
5.4.3	Condizionamento di un problema	369
5.4.4	Stabilità di un algoritmo	373

Capitolo Sesto Successioni e serie numeriche

6.1	Limite di una funzione	377
6.1.1	Punti di accumulazione	377
6.1.2	Definizione di limite	378
6.1.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto	379
6.1.4	Verifica del limite	381
6.1.5	Limite destro e limite sinistro	384
6.1.6	Teoremi sui limiti	386

6.1.7	Operazioni sui limiti	388
6.1.8	Generalizzare le operazioni sui limiti	389
6.1.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli	391
6.1.10	Calcolo di limiti	394
6.2	Successioni e limiti di successioni	398
6.2.1	Definizione e generalità	398
6.2.2	Limite di una successione di numeri reali	401
6.3	Continuità delle funzioni reali	402
6.3.1	Funzione continua	402
6.3.2	Funzione uniformemente continua	407
6.3.3	Punti di discontinuità	408
6.3.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione	410
6.4	Derivata	411
6.4.1	Rapporto incrementale	411
6.4.2	Definizione di derivata e derivabilità	412
6.4.3	Derivata destra e sinistra	413
6.4.4	Continuità e derivabilità	413
6.4.5	Dal rapporto incrementale alla derivata	414
6.4.6	Interpretazione geometrica della derivata	416
6.4.7	Retta tangente ad una funzione in un punto	418
6.4.8	Regole di derivazione	419
6.4.9	Calcolo di derivate	419
6.4.10	Punti di discontinuità della derivata	422
6.4.11	Derivate di ordine superiore	425
6.4.12	Differenziale	426
6.5	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale	427
6.5.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange	427
6.5.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione	431
6.5.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione	432
6.5.4	Estremo inferiore ed estremo superiore	432
6.5.5	Massimo e minimo relativo	434
6.5.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto	435
6.5.7	Condizioni su concavità e punti di flesso	439
6.5.8	I teoremi di l'Hopital	441
6.5.9	Asintoti di una funzione	444
6.5.10	Studio del grafico di una funzione	446
6.6	Il problema della misura	454
6.6.1	Introduzione	454
6.6.2	La misura di Peano-Jordan	454
6.6.3	La misura di Vitali-Lebesgue	460
6.7	Integrazione indefinita	462
6.7.1	Definizioni	462
6.7.2	Regole di integrazione	464
6.7.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche	470
6.8	Integrazione definita	475
6.8.1	Somma inferiore e somma superiore	475
6.8.2	Dalle somme all'integrale di Riemann	477
6.8.3	Le somme di Cauchy-Riemann	478

XIV **Indice generale**

6.8.4	Funzioni integrabili	480
6.8.5	Proprietà degli integrali definiti	481
6.8.6	Teoremi sull'integrazione definita	482
6.9	Integrali impropri	487
6.9.1	Caso di un intervallo semi-aperto	487
6.9.2	Caso di un intervallo aperto	488
6.9.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato	489
6.10	Calcolo di volumi di solidi di rotazione	490
6.11	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione	492
6.12	Serie numeriche	495
6.12.1	Definizioni	495
6.12.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque	497
6.12.3	La serie geometrica	498
6.12.4	Resto di una serie	499
6.12.5	Teoremi generali sul carattere delle serie	501
6.13	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi	502
6.13.1	Premessa	502
6.13.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy)	502
6.13.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica	503
6.13.4	Criterio del confronto (o di Gauss)	504
6.13.5	Secondo criterio del confronto	505
6.13.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert)	506
6.13.7	Criterio della radice (o di Cauchy)	507
6.14	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque	508
6.14.1	Criterio di Leibnitz	508
6.14.2	La convergenza assoluta	509
6.14.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque	510
6.15	Sviluppo in serie di funzioni	511
6.15.1	Le serie di funzioni	511
6.15.2	Le serie di potenze	513
6.15.3	La serie di Mac Laurin	515
6.15.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari	517
6.15.5	La formula di Eulero	520
6.15.6	La serie di Taylor	521
6.15.7	Applicazioni della serie di Taylor	522
6.15.8	La serie di Fourier	528

Capitolo Settimo Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica

7.1	Definire la probabilità	533
7.1.1	Esperimento, insieme universo ed eventi	533
7.1.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi	534
7.1.3	Definizione classica della probabilità	535
7.1.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità	540

7.1.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa)	545
7.1.6	Definizione assiomatica di probabilità	548
7.2	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità	550
7.2.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto	550
7.2.2	Probabilità condizionata e probabilità composta	551
7.2.3	Indipendenza stocastica	554
7.2.4	Formula della probabilità totale	556
7.2.5	Teorema di Bayes	558
7.3	Fasi e strumenti dell'indagine statistica	561
7.3.1	Popolazioni, caratteri e modalità	561
7.3.2	Caratteri quantitativi e qualitativi	562
7.3.3	Intensità, frequenze assolute e relative	565
7.3.4	Tabelle e distribuzioni	568
7.3.5	Grafici	569
7.3.6	Grafici per caratteri qualitativi	570
7.3.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti	574
7.3.8	Grafici per caratteri quantitativi continui	576
7.3.9	Le fasi di una indagine statistica	579
7.3.10	Analisi statistica univariata	581
7.4	Indici di posizione	582
7.4.1	La media aritmetica	583
7.4.2	La media geometrica	586
7.4.3	La media armonica	588
7.4.4	La media quadratica	590
7.4.5	Relazione tra le medie algebriche	591
7.4.6	La moda	591
7.4.7	La mediana	593
7.4.8	I quantili	597
7.5	Indici di variabilità	598
7.5.1	Campo di variabilità e differenze interquantili	599
7.5.2	Scarto semplice medio	599
7.5.3	Devianza	601
7.5.4	Varianza e scarto quadratico medio	601
7.5.5	Indici di dispersione relativi	604
7.5.6	Le differenze medie	605
7.5.7	La concentrazione	608
7.6	Indici di forma	615
7.6.1	Asimmetria	615
7.6.2	Curtosi	616
7.7	Rapporti statistici	618
7.7.1	Tipologie di rapporti statistici	618
7.7.2	I numeri indici	624
7.7.3	I numeri indici complessi	629

PARTE SECONDA
MATEMATICA APPLICATA

Capitolo Primo Matematica Finanziaria

1.1	Operazioni finanziarie	633
1.1.1	Criteri di preferenza assoluta	635
1.2	Legge di capitalizzazione semplice o lineare	635
1.2.1	Ricerca del tasso	638
1.2.2	Ricerca del tempo	640
1.2.3	Ricerca del capitale iniziale	642
1.3	Legge di capitalizzazione composta o esponenziale	643
1.3.1	Ricerca del tasso	645
1.3.2	Ricerca del tempo	646
1.3.3	Ricerca del capitale iniziale	647
1.4	Scindibilità	648
1.5	Confronto grafico fra capitalizzazione semplice e composta	649
1.6	Tassi equivalenti	650
1.6.1	Tassi equivalenti in capitalizzazione semplice	650
1.6.2	Tassi equivalenti in capitalizzazione composta	651
1.6.3	Tasso annuo nominale convertibile k volte	653
1.6.4	Studio di J_k al variare del frazionamento k	656
1.7	Leggi di attualizzazione o di sconto	657
1.7.1	Sconto commerciale	658
1.7.2	Legge di attualizzazione semplice o sconto razionale	660
1.7.3	Legge di attualizzazione composta	661
1.7.4	Legge di capitalizzazione coniugata allo sconto commerciale	662
1.7.5	Tassi equivalenti in regimi diversi: relazioni tra d e i	664
1.8	Leggi coniugate	665
1.9	Principio di equivalenza finanziaria	665
1.10	Rendite certe	669
1.10.1	Montante di una rendita	670
1.10.2	Valore attuale di una rendita	675
1.11	Estinzione o rimborso di un prestito	681
1.11.1	Ammortamento italiano o uniforme o a quote di capitale costanti	685
1.11.2	Ammortamento francese o progressivo o a rata costante	687
1.11.3	Ammortamento americano o a due tassi o a quote di accumulazione	691
1.11.4	Estinzione di un prestito diviso in titoli	694
1.12	Leasing	696
1.13	Scelta tra investimenti	697
1.13.1	REA o VAN	697
1.13.2	Tasso implicito o TIR	697
1.13.3	Tempo di recupero del capitale	698

Allegato A -	Formulario di Matematica Finanziaria	699
---------------------	---	-----

Capitolo Secondo Matematica Attuariale

2.1	Operazioni finanziarie aleatorie: le assicurazioni	705
2.2	Probabilità di vita e di morte	707
2.3	Assicurazione elementare di vita o fattore attuariale di sconto	711
2.4	Assicurazioni di rendita vitalizia	714
2.4.1	Rendita vitalizia immediata illimitata o a “vita intera”	714
2.4.2	Rendita vitalizia differita illimitata o pensione	716
2.4.3	Rendita vitalizia immediata temporanea	717
2.4.4	Rendita vitalizia differita e temporanea	719
2.5	Assicurazione elementare di morte	720
2.5.1	Assicurazione in caso di morte a vita intera	721
2.5.2	Assicurazione in caso di morte immediata e temporanea	722
2.5.3	Assicurazione in caso di morte differita e temporanea	724
2.5.4	Assicurazione in caso di morte differita	725
2.5.5	Pagamento all’atto del decesso	726
2.6	Assicurazioni miste	727
2.6.1	Assicurazione mista semplice	728
2.6.2	Assicurazione mista doppia	729
2.6.3	Assicurazione mista a capitale raddoppiato	729
2.7	Premi periodici puri	730
2.8	Premi di tariffa	731
2.9	Riserva matematica	732
2.10	Rischio aggravato	734

Allegato B - Formulario di Matematica Attuariale 735**Capitolo terzo Ricerca Operativa**

3.1	Definizione	740
3.2	Fasi di un problema di ricerca operativa	741
3.2.1	Definizione del problema e raccolta dei dati	741
3.2.2	Costruzione del modello	741
3.2.3	Ricerca della soluzione ottima e verifica	742
3.3	Modello matematico del problema	742
3.3.1	Richiami di disequazioni lineari in due variabili	744
3.3.2	Richiami sui sistemi di disequazioni lineari in due variabili	746
3.4	Le decisioni	751
3.4.1	In condizione di certezza	752
3.4.2	In condizione di incertezza	752
3.4.3	Decisioni in condizioni di certezza con effetti immediati	752
3.4.4	Decisioni in condizioni di certezza con effetti differiti	759
3.4.5	Decisioni in condizioni di incertezza	765
3.5	La programmazione lineare	769

Appendice Storia della matematica 779

2

Capitolo Secondo

Matematica Attuariale

Quello di proteggersi contro i rischi di un destino avverso è un bisogno primario dell'uomo presente sin dall'antichità. Prova ne sia il fatto che le prime e più antiche forme di assicurazione risalgono all'Antico Egitto. Infatti, già nel 2700 A.C. fu istituita una cassa mutua per le spese funebri dei tagliapietre. Tra le professioni che hanno spinto maggiormente verso la creazione di strumenti di protezione contro gli imprevisti, vi sono quelle legate alla navigazione: spesso infatti è stata la violenza del mare a suscitare la domanda di assicurazione. Pare che le prime compagnie siano sorte nelle città marinare e fluviali. Così ad esempio, nel XIV nasce a Firenze, sull'Arno, la figura dell'intermediario; mentre nella città portuale di Genova, nel 1424, nasce la prima società di assicurazioni che si chiama proprio *Tam mari quam terra*. A Londra invece nascono e si sviluppano i *Lloyd's*. Questo era originariamente il nome di una taverna dove erano soliti trovarsi gli intermediari londinesi ad ascoltare il proprietario, Edward Lloyd, che teneva un utile bollettino sulla situazione dei viaggi in mare delle navi assicurate. Questo servizio divenne così importante ed influente da trasferirsi nella City, il quartiere degli affari, dove si trasformò in un meccanismo con cui gli assicuratori condividevano tra loro i rischi legati alle disavventure dei clienti. Sempre a Londra nasce, nel 1762, il primo Istituto di assicurazione sulla vita umana chiamato *Equitable*, tutt'oggi esistente, e si pubblicano le prime tavole di mortalità, che allora stimavano la speranza di vita media in 33 anni. Le assicurazioni ramo vita vengono poi sancite per regio decreto dal Re d'Inghilterra Giorgio III, trovando quindi un'importante legittimazione istituzionale. Nel secolo successivo si diffusero poi in tutta Europa, delineando il moderno panorama del mercato assicurativo.

2.1 Operazioni finanziarie aleatorie: le assicurazioni

In Matematica Finanziaria, l'operazione finanziaria è certa sia nelle somme da incassare o riscuotere, sia nella data di esecuzione. La Matematica Attuariale studia le operazioni finanziarie che non sono in condizioni di certezza, ovvero quelle operazioni dove c'è sempre lo **scambio di denaro in epoche diverse**, ma dove tali scambi, e in particolare il calcolo delle assicurazioni, sono **condizionati**

da eventi che si possono verificare oppure no. L'unica condizione richiesta è che il verificarsi di questi eventi sia suscettibile di **valutazioni probabilistiche**. In sostanza, l'assicurato, volendo proteggersi contro un imprevisto, trasferisce all'assicuratore il *rischio* (inteso come pregiudizio economico) che dipende da un aleatorio evento nefasto. Se l'evento si realizza si ha un *sinistro*, che può provocare danni più o meno gravi alla persona dell'assicurato o al suo patrimonio. La Matematica Attuariale tratta la relazione fra premi pagati come corrispettivo dell'impegno da parte dell'assicuratore di erogare un certo importo se l'evento si verificherà nei modi e nei tempi previsti dal contratto. Il calcolo del premio si basa su valutazioni probabilistiche dell'evento e sull'ammontare del capitale da erogare in futuro nel caso in cui si verificasse l'evento nefasto. Di conseguenza, nel calcolo del premio occorre includere anche valutazioni finanziarie legate ad un tasso utilizzato chiamato **tasso tecnico**. Esistono due categorie di assicurazioni, chiamati rami:

- **vita**: si riferisce ad eventi riguardanti la vita umana;
- **danni**: si riferisce ad eventi vari: circolazione delle auto, incendi, furto, ecc.

Il contratto di assicurazione, dal punto di vista giuridico, è definito nel codice civile all'art. 1882: *L'assicurazione è il contratto col quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana.*

Il contratto può prevedere tre figure da una parte:

- il **contraente**: colui che stipula il contratto d'assicurazione e si impegna a pagare il *premio* che può essere *unico* o *periodico* (generalmente ogni anno);
- il **beneficiario**: colui che riscuoterà il capitale assicurato o la rendita e può coincidere o no con il contraente;
- l'**assicurato**: colui a cui si riferisce il rischio previsto dal contratto. Per una persona, la vita o la morte; per un bene, il suo deperimento.

Dall'altro lato l'**assicuratore**, che può essere una Società per azioni o un Ente Pubblico.

Il premio si distingue in:

- **puro**: se il calcolo viene fatto considerando un gioco equo tra il premio pagato dall'assicurato e il valore attuale della prestazione che l'assicuratore s'impegna a corrispondere nel caso in cui si verifichi l'evento;
- **caricato o di tariffa**: se tiene conto delle spese di gestione e del profitto che vuole realizzare l'assicurazione.

Sono particolarmente importanti le assicurazioni sulla vita, perché rappresentano una forma di previdenza e di risparmio forzoso o volontario. Così, andando avanti nell'età, la pensione può, ad esempio, coprire il rischio di non avere un reddito sufficiente per vivere. In definitiva, dal punto di vista socio-economico, l'assicurazione soddisfa il bisogno di sicurezza inteso come la necessità di proteggersi da imprevisti, che è sicuramente uno dei bisogni primari.

Le assicurazioni sulla vita si distinguono in:

- **caso vita:** nelle quali l'assicuratore si impegna al pagamento delle somme concordate subordinatamente all'esistenza in vita dell'assicurato;
- **caso morte:** nelle quali l'assicuratore si impegna al pagamento delle somme concordate al verificarsi della morte dell'assicurato;
- **mista:** se è una combinazione del caso morte e del caso vita.

2.2 Probabilità di vita e di morte

L'importanza a livello sociale delle assicurazioni del ramo vita è tale che in forza di legge si è obbligati ad avere una posizione previdenziale, specie se si svolge un'attività lavorativa, anche se saltuaria. Bisogna valutare le probabilità relative all'evento vita. Considerando una singola persona, la probabilità di sopravvivenza (o di morte) dipende da moltissimi fattori, come ad esempio età, sesso, presenza o meno di fattori di rischio come fumo, alcool, obesità, malattie croniche pregresse, familiarità, ecc. Essi sono così tanti che risulta quasi impossibile valutare l'incidenza di ognuno di essi. Ma, se la stessa persona la si considera come elemento di un collettivo statistico di dimensioni elevate, alla frequenza di sopravvivenza degli individui si può applicare la concezione frequentista della probabilità, valutata per sesso e per fascia d'età.

L'economista americano von Mises osservò che al crescere del numero n_r di prove effettuate, si nota sperimentalmente che questo numero subisce variazioni casuali. Tuttavia, queste variazioni mostrano una certa regolarità e si stabilizzano intorno ad un determinato valore. L'ampiezza delle variazioni casuali diminuisce al crescere del numero di prove effettuate.

Da tali osservazioni viene formulata la seguente **legge empirica del caso**:

Se si effettua un gran numero di prove di un esperimento, tutte nelle medesime condizioni riproducibili, la frequenza relativa di un evento aleatorio, per il quale la probabilità resta costante al crescere del numero delle prove, tende ordinariamente a differire in modo sempre minore dalla probabilità dell'evento. Tale differenza diminuisce in modulo al crescere delle prove effettuate. In simboli:

$$\lim_{n_r \rightarrow \infty} F(E) = \lim_{n_r \rightarrow \infty} \frac{n_v}{n_r} = P(E)$$

In definitiva, si può concludere che i dati sperimentali trovati per un collettivo statistico ampio si possono assumere come probabilità per la collettività stessa. Sfruttando tale legge si costruiscono le **tavole demografiche**. La loro costruzione si basa sul **metodo dei decessi**, per il quale si rilevano i morti, distinti per sesso e anno di nascita, basandosi sulle dichiarazioni di morte (la dichiarazione dell'avvenuta morte è un obbligo di legge, con rilevanza penale in caso di omissione, e per questo i dati sono molto attendibili) e il **metodo del**

censimento, che si svolge, in Italia, sempre per legge, ogni dieci anni. Usando i due metodi e affinando i dati grezzi con tecniche statistiche perequative al fine di eliminare le irregolarità dovute agli ineliminabili errori accidentali si costruiscono le tavole per tutte le età riguardanti la popolazione maschile, femminile e complessiva, riferendosi ad un territorio e ad un dato periodo.

In Italia, le più recenti sono le *Tavole di mortalità e sopravvivenza 2009 per maschi e femmine* elaborate dall'ISTAT (disponibili online). Queste sono costruite partendo da una popolazione ipotetica di nati al tempo $x = 0$ pari a 100.000 e conteggiando, anno per anno (si considerano solo età intere, cioè gli anni compiuti), i sopravvissuti fino alla così detta età estrema indicata con ω . Nella tavola sono contenuti tanti valori, ma per calcolare la probabilità di vita o di morte interessano:

- l_x : numero di viventi all'età x dell'insieme teorico di 100.000 nati in $x = 0$;
- d_x : numero dei morti tra l'età x e la successiva, cioè quelli che non arrivano all'età $x+1$.

Si noti che il termine l viene dall'iniziale del termine inglese “living” = vivente, e che analogamente il termine d deriva da “dead” = morto. Ciò deriva dal fatto, come accennato nelle note storiche, che nel campo attuariale gli Inglesi sono stati i pionieri.

Infine, se si confrontano i dati delle tavole demografiche con lo scorrere del tempo, si ricava che la vita media, così come il numero dei viventi alle varie età, tende ad aumentare e che tali valori sono maggiori per le femmine rispetto che per i maschi, e che aumenta anche l'età estrema di sopravvivenza.

Esempio

Si confrontino il numero di viventi maschi sessantenni e l'età estrema della tavola relativa rispetto al tempo.

Per i Maschi Italia 60/62: $l_{60} = 76.790$ e $\omega = 106$

per i Maschi Italia 70/72: $l_{60} = 83.645$ e $\omega = 109$

per i Maschi Italia 1999: $l_{60} = 88.699$ e $\omega = 109$

per i Maschi Italia 2009: $l_{60} = 91.692$ e $\omega = 109$

Si noti come partendo da una popolazione teorica di 100.000 coetanei i sessantenni dal 1962 al 2009 (ultimi dati disponibile, fonte ISTAT) sono aumentati di circa il 20%. L'aumento della longevità è il risultato dovuto a svariati motivi, tra cui migliori condizioni igienico-sanitarie, progressi nella cura di molte malattie, ecc.

Tra i viventi all'età l_x , alcuni saranno in vita dopo un anno e sono l_{x+1} . Poiché, quest'ultimo valore non può essere maggiore di l_x , la differenza rappresenta il numero di morti all'età x (ovvero quelli di età x che muoiono prima di aver raggiunto l'età $x+1$):

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

La collana è rivolta a quanti desiderano acquisire l'**abilitazione all'insegnamento** nelle scuole e che devono pertanto superare gli esami di ammissione previsti dalla normativa sulla formazione del personale docente.

Matematica applicata

manuale per prove scritte e orali

Il testo punta ad una trattazione rigorosa ma essenziale, funzionale ad una **rapida revisione** delle conoscenze pregresse e può essere utilmente affiancato dagli eserciziari della stessa collana.

Nella **prima parte** vengono inquadrati gli **aspetti ordinamentali** correlati all'insegnamento della disciplina così come emergono dalle Indicazioni Nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. **Seconda e terza parte** sono rispettivamente dedicate ai **contenuti disciplinari** della matematica generale e della matematica finanziaria e attuariale.

Il volume è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.

t₂₂

Per completare la preparazione:

t&e Competenze linguistiche e comprensione testi
ISBN 9788865841549

e₂₂ Matematica applicata - esercizi commentati
ISBN 9788865843888

 sfoglia le demo su edises.it

Per essere sempre aggiornato seguici su Facebook 

facebook.com/iltirocinioformativoattivo

Clicca su mi piace  per ricevere gli aggiornamenti.



www.edises.it
info@edises.it



€ 38,00

